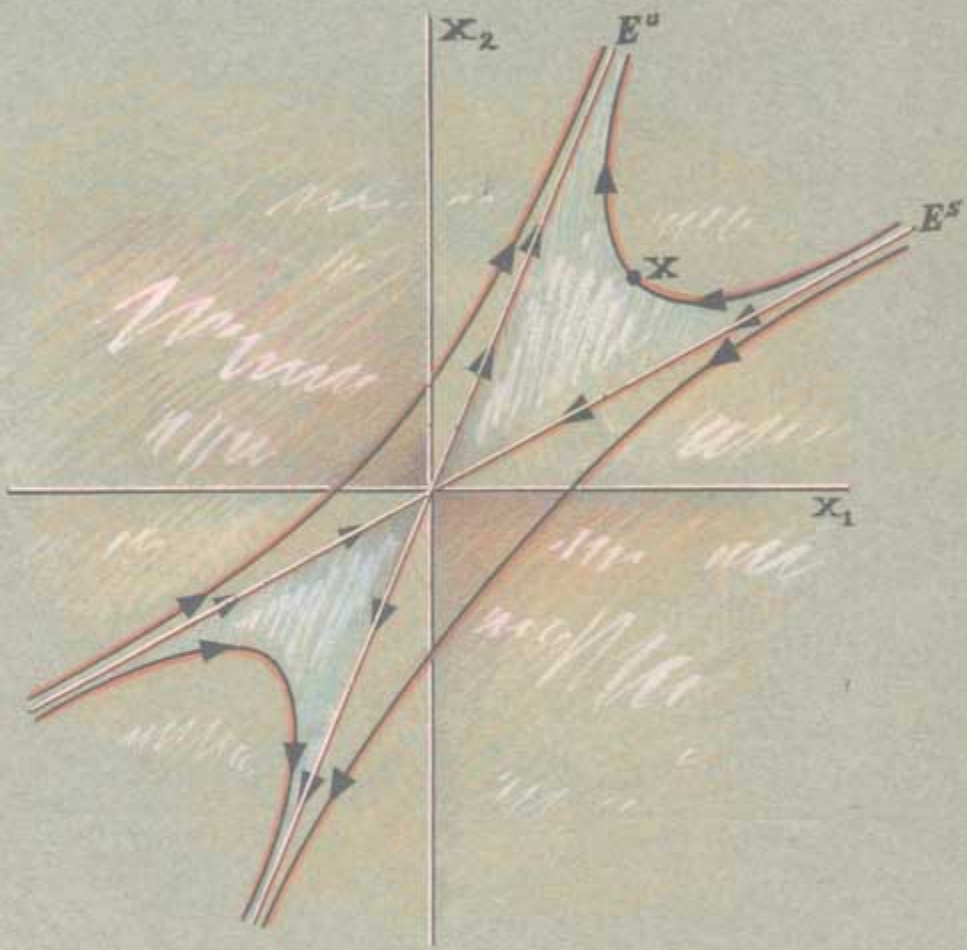
ciencia y técnica

Carlos Fernández Pérez



ecuaciones diferenciales - I

ecuaciones lineales

ecuaciones diferenciales - I

ecuaciones lineales

CARLOS FERNÁNDEZ PÉREZ

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

ecuaciones diferenciales - I

ecuaciones lineales

Ediciones Pirámide, S. A. - Madrid

Diseño de cubierta:
Zambucho, S. A.

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 534 bis del Código Penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización.

© Carlos Fernández Pérez
EDICIONES PIRÁMIDE, S. A., 1992
Telémaco, 43. 28027 Madrid
Depósito legal: M. 31.117-1992
ISBN: 84-368-0699-9 (O.C.)
ISBN: 84-368-0697-2 (Tomo I)
Printed in Spain
Impreso en Lavel, S. A.
Los Llanos, nave 6. Humanes (Madrid)

A Marién

Índice

Prólogo 11

Introducción 15

1. Ecuaciones lineales de primer orden 39

1.1 Solución general y problema de valor inicial 39
1.2. Modelos lineales 51
Problemas 62

2. Sistemas de ecuaciones lineales: teoría general 65

2.1. El problema de valor inicial. Estructura del conjunto de soluciones 65
2.2. Demostración del teorema fundamental de existencia y unicidad 72
2.3. Matrices fundamentales 78
2.4. Sistemas lineales no homogéneos. La fórmula de variación de las constantes. 85
2.5. La ecuación diferencial de orden n 89
Problemas 94

3. Sistemas lineales con coeficientes constantes I: matrices diagonalizables 99

3.1. Autovalores reales distintos. Matrices simétricas 99
3.2. Autovalores complejos 113
Problemas 126

4. Sistemas lineales con coeficientes constantes II: sistemas planos. Ecuaciones lineales de segundo orden 129

4.1. Autovalores dobles 129
4.2. Trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales 134
4.3. Diagramas de fases de los sistemas planos 142
4.4. Ecuaciones lineales de segundo orden 161
4.5. Aplicaciones: oscilaciones mecánicas y eléctricas. Economía 173
Problemas 189

5. Sistemas lineales con coeficientes constantes III: el caso general .. 193

5.1. Exponencial de una matriz 194
5.2. Cálculo de exp (At). Forma canónica de Jordan 200
5.3. Cálculo de la forma canónica de una matriz 212
5.4. Ecuaciones lineales de orden n 238
Problemas 242

6. Comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema lineal. 247

6.1. Atractores y fuentes 247
6.2. Sistemas hiperbólicos 255
6.3. Soluciones acotadas. Soluciones periódicas 265
6.4. Sistemas no autónomos 274
6.5. Sistemas periódicos 282
Problemas 290

Soluciones de los problemas 297

Referencias 305

Índice analítico 307

Prólogo

Ésta es la primera parte de un curso sobre ecuaciones diferenciales ordinarias que no presupone ningún conocimiento sobre la materia y que pretende llegar a transmitir algo del espíritu de los problemas y métodos actuales que en ella se plantean.

Los requisitos para seguir este curso no pasan de un conocimiento de los elementos del álgebra lineal (esto, en particular, para esta primera parte) y del cálculo de funciones de una y varias variables, propio de un razonable primer año de enseñanza superior. (En los apéndices 2 y 3 que seguirán a la segunda parte del curso se resumen, para comodidad del lector, algunos de los conceptos y resultados que se precisan de ambas disciplinas.)

El curso comienza con una introducción en la que se van dando las primeras definiciones y se intenta describir el origen, el interés en las aplicaciones y las principales cuestiones que se plantean a propósito de las ecuaciones diferenciales. Su lectura es deseable antes de iniciar el estudio del capítulo 1, aunque no se comprendan en una primera lectura todas las alusiones e implicaciones contenidas en ella. Además de irse familiarizando con los términos del argot de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se pretende también una primera «impregnación» de lo que son sus ideas fundamentales.

El orden de los capítulos responde, desde luego, a un desarrollo coherente de la disciplina, pero también al objetivo de que el texto pueda ser utilizado en cursos de distinta longitud y profundidad. Así, por ejemplo, un curso elemental podría constar del capítulo 1, el primer apartado del capítulo 2 y los capítulos 3 y 4, junto con lo que será el capítulo 7, dedicado a las ecuaciones no lineales escalares (que, naturalmente, podría verse a continuación del capítulo 1).

El capítulo 1, muy simple, está dedicado a las ecuaciones lineales escalares. Se aprovecha su simplicidad para poner ya de manifiesto propiedades estructurales de las soluciones que jugarán un papel importante en los sistemas de ecuaciones. Se exponen también algunas de las aplicaciones típicas de las ecuaciones lineales y, abundando en cuestiones que se suscitan en la introducción, las razones del interés de las ecuaciones lineales en las aplicaciones y en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el capítulo 2 se desarrollan los elementos de la teoría general de los sistemas lineales. En el apartado 2.1 se formula el correspondiente problema de valor inicial

y se enuncia el teorema de existencia y unicidad de solución del mismo, describiéndose el camino que lleva a su demostración. Aceptado dicho teorema, se prueba que las soluciones de un sistema homogéneo forman un espacio vectorial de dimensión n y se muestra la estructura del conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo. Con la lectura de este apartado 2.1 se tiene base suficiente para proseguir directamente con los capítulos 3 y 4. El capítulo 2 sigue con la demostración del teorema fundamental de existencia y unicidad (Ap. 2.2), la noción y propiedades de matrices fundamentales (Ap. 2.3), el método de variación de las constantes (Ap. 2.4) y el estudio de la ecuación diferencial de orden n (Ap. 2.5). Como se indica, puede prescindirse de estos apartados en una primera lectura.

El capítulo 3 pasa ya a considerar los sistemas lineales con coeficientes constantes, para los cuales es posible encontrar explícitamente las soluciones. Para el caso de matrices diagonalizables se construye una base del espacio de soluciones del sistema homogéneo mediante argumentos muy simples de álgebra lineal: no es necesario hablar de formas canónicas ni de exponencial de una matriz y se ponen en juego únicamente nociones y resultados verdaderamente elementales (incluso se centran los argumentos en la idea de «cambio de variables», más simple, creemos, que la de cambio de base).

El capítulo 4 se detiene en los sistemas planos. El único caso no diagonalizable se trata *ad hoc*, sin apelar a la teoría general de formas canónicas. Se tienen así resueltos *todos* los sistemas de dos ecuaciones lineales (y, consecuentemente, todas las ecuaciones lineales de segundo orden), lo que, junto al caso de matrices diagonalizables estudiado en el capítulo 3, cubre buen número de aplicaciones prácticas (en el apartado 4.5 se consideran con cierto detalle las oscilaciones mecánicas lineales y se comentan otras aplicaciones a circuitos eléctricos y a Economía). Los sistemas planos, aparte de su utilidad, disponen de interpretaciones geométricas muy elocuentes gracias a los conceptos de trayectoria y diagrama de fases, conceptos que jugarán un papel importantísimo en el estudio de los sistemas no lineales autónomos. Se ven, por ello, en detalle los diagramas de fases de los sistemas planos, los cuales, además del interés que por sí mismos tienen, marcan la pauta (por analogía o por contraste) de los estudios a realizar en sistemas lineales de dimensión mayor que dos y en sistemas no lineales.

El posible curso elemental así descrito requiere una base de álgebra lineal y cálculo infinitesimal realmente mínima. Con un poco más de esfuerzo, ese curso se puede ir ampliando con los temas tratados en el resto del capítulo 2 y en los capítulos 5 y 6. El capítulo 5 trata ya de los sistemas lineales generales de coeficientes constantes: se introduce la exponencial de una matriz (apoyándose en la teoría general desarrollada, de la manera más simple posible, en el capítulo 2) y se resuelven dichos sistemas apelando a las formas canónicas de matrices.

Si los capítulos 3 y 5 se centran en aspectos analíticos y computacionales de los sistemas lineales, el capítulo 6 lo hace en los aspectos cualitativos de sus soluciones: comportamiento a largo plazo (cuando $t \to \infty$), acotación, periodicidad, cuestiones que en muchas ocasiones son más importantes que el propio conocimiento explícito de aquéllas. Este punto de vista es fundamental en el estudio de los sistemas no lineales, y los resultados que se establecen en el caso lineal serán de gran valor para ese estudio cuando los sistemas no lineales se aproximen «localmente» por sistemas

lineales. Cada apartado del capítulo 6 significa un paso en ese estudio cualitativo: el apartado 6.1 ya contiene resultados importantes de gran interés en las aplicaciones, que se van completando si se añade la lectura de los sucesivos apartados. No se exponen, de todos modos, los resultados más completos que existen sobre estas cuestiones: se trata de ver resultados aplicables e ilustrativos sin pretender elaborar un tratado sobre la materia.

Los capítulos se organizan en apartados. El apartado 2.3 es el apartado 3 del capítulo 2. Las fórmulas se numeran para cada apartado. Al final de cada capítulo se incluye una serie de problemas; parte de ellos tiene el carácter de simples ejercicios, mientras que otros suponen pequeños complementos a la teoría desarrollada en el texto principal. En estos últimos, así como en las observaciones y notas, nos permitimos en ocasiones salir del nivel medio de dicho texto principal.

Introducción

Una ecuación diferencial es una relación que ha de satisfacer una «función incógnita» junto con cierto número de sus derivadas. Por ejemplo:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (\cos t)\frac{dx}{dt} + x - t^3 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - t^2x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

son ecuaciones diferenciales. En (1) y (2), $x(t)$ es una función de la *variable independiente* t, la cual se supone que se mueve en un cierto intervalo, o intervalos, de la recta $\mathbb{R}$, mientras que $x(t)$ toma valores también en $\mathbb{R}$ (se considerarán, asimismo, situaciones más generales). Las ecuaciones (1) y (2) son *ecuaciones diferenciales ordinarias*, en razón de que las derivadas que en ellas aparecen son ordinarias por tratarse la función incógnita de una función de *una* variable. La ecuación (3) es una *ecuación en derivadas parciales*, por ser la función incógnita $u(x, y, z, t)$ una función de varias variables e intervenir en aquélla derivadas parciales respecto a las distintas variables independientes de las que depende la función. Se trata de la célebre *ecuación de ondas* (tridimensional) de la física matemática. Completan el trío de celebridades la *ecuación del calor* (o de la *difusión*):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

y la *ecuación del potencial:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

En este curso trataremos únicamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales requiere técnicas bastante diferentes a las utilizadas en ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque, como es natural, abundan las ideas y métodos que entreverán ambas teorías. El paso de una a varias variables independientes implica, en particular, el salto de dimensión finita a dimensión infinita en el análisis de determinadas cuestiones de las ecuaciones diferenciales, lo que presenta, en ocasiones, problemas técnicos importantes.

La ecuación (1) es una *ecuación de primer orden* porque en ella aparece únicamente la derivada primera de la función incógnita; la ecuación (2) es una ecuación de segundo orden (como también lo son las ecuaciones (3), (4) y (5)). El *orden* de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

La forma general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es

$$F(t, x, x') = 0 \tag{6}$$

donde F es una función de tres argumentos definida en una cierta región de $\mathbb{R}^3$. Una función derivable $x(t)$ se dice que es *solución* de la ecuación (6) en el intervalo I de $\mathbb{R}$, si

a) $(t, x(t), x'(t))$ está en el dominio de definición de F para todo $t \in I$, y

b) $F(t, x(t), x'(t)) = 0$, para todo $t \in I$.

(La condición *a*) da sentido a la *b*).)

Supondremos, de manera general, que la ecuación (6) está en *forma normal:*

$$x' = f(t, x) \tag{7}$$

o sea, que se puede «despejar» x' en la ecuación (6) (esto está garantizado bajo hipótesis muy generales por el teorema de la función implícita[1]). Podría, por ejemplo, presentársenos una ecuación como

$$[x'(t)]^2 + 5t^2x'(t) - 2x^2(t) = 0$$

que, según lo anterior, representaría, en realidad, *dos* ecuaciones diferenciales:

$$x' = \frac{1}{2}\left[-5t^2 + \sqrt{25t^4 + 8x^2}\right]$$

y

$$x' = \frac{1}{2}\left[-5t^2 - \sqrt{25t^4 + 8x^2}\right]$$

[1] Si (t_0, x_0, x_0') es tal que $F(t_0, x_0, x_0') = 0$ y $\partial F/\partial x'(t_0, x_0, x_0') \neq 0$, entonces existe una función f de dos variables definida en un entorno de (t_0, x_0) tal que $F(t, x, f(t, x)) = 0$ para todo punto de ese entorno. O sea, la *ecuación* $F(t, x, x') = 0$ define implícitamente a x' como función de (t, x) o, en otras palabras, x' se puede «despejar», al menos teóricamente, en función de t y x.

En la forma normal (7) se supondrá, en general, que $f(t, x)$ es una función continua en un subconjunto[2] D del plano $\mathbb{R}^2$. Entenderemos por *solución* de la ecuación (7) en el intervalo I de $\mathbb{R}$ una función $x(t)$ con derivada primera continua en I tal que

a) $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$.
b) $x'(t) = f(t, x(t))$, para todo $t \in I$.

(Como antes, la condición *a*) da sentido a la *b*).)

Parece obvio que encontrar las soluciones de una ecuación diferencial ha de constituir un objetivo fundamental de la teoría a desarrollar, y que habría, por tanto, que intentar elaborar métodos que condujesen a fórmulas que diesen, más o menos explícitamente, soluciones de la ecuación diferencial, a ser posible todas ellas (en cuyo caso se diría que una fórmula así constituye la *solución general* de la ecuación). La cuestión, como veremos, no es tan simple. Tales fórmulas sólo se pueden obtener para ecuaciones muy especiales y, en general, habrá que «conformarse» con garantizar, mediante los teoremas y resultados pertinentes, la existencia de soluciones particulares que tengan un interés para nosotros (por ejemplo, en relación con las posibles aplicaciones físicas). Ello no es, en realidad, un grave contratiempo; complementada aquella «garantía de existencia de solución» con desarrollos teóricos de gran profundidad y belleza, es posible obtener sobre las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial una información útil y, en muchos casos, suficiente para la aplicación que nos interese. Volveremos repetidamente sobre esta cuestión.

Cuando en el segundo miembro de (7) la función f es lineal en x, se dice que la ecuación es una *ecuación diferencial lineal*. La forma general es, pues,

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{8}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son dos funciones definidas y continuas en un intervalo (α, ω) de $\mathbb{R}$.

Las ecuaciones lineales admiten un tratamiento sistemático muy completo y para ellas es posible (incluso en muchos casos de situaciones más generales, a saber, los *sistemas* de ecuaciones lineales) encontrar fórmulas que dan explícitamente todas sus soluciones. Las ecuaciones lineales son importantes tanto por sí mismas (por la teoría tan completa que poseen y por las aplicaciones en las que aparecen) como por la aproximación que permiten realizar a las ecuaciones no lineales, al modo en que la diferencial (función lineal) aproxima *localmente* a la función de la que proviene. Esta clasificación de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales quedará reflejada en la división del curso en dos partes, la primera dedicada a las ecuaciones lineales y la segunda, equipados ya con la teoría básica de éstas, a desarrollar algunos de los métodos de estudio de las ecuaciones no lineales.

---

[2] Más precisamente, en un subconjunto *abierto* D de $\mathbb{R}^2$ (véase el apéndice 3 de *Ecuaciones diferenciales II*).

El origen de las ecuaciones diferenciales. Principales cuestiones que se plantean

La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó a desarrollarse a finales del siglo XVII en estrecha relación con el naciente cálculo diferencial e integral (véase apéndice 1 en *Ecuaciones diferenciales II* del mismo autor). Las ecuaciones diferenciales ordinarias (lo mismo que las ecuaciones en derivadas parciales) surgen en la investigación de distintos problemas de la Física y la Técnica: elasticidad, en sus aplicaciones a la construcción, el péndulo, en conexión con la cuestión de la forma de la Tierra y la ley de atracción gravitatoria, etc. Y así ha sido a lo largo de la historia, a medida que el desarrollo de las ciencias (no sólo de la Física, sino también, por ejemplo, de la Biología y la Economía) planteaba nuevos *problemas formulables en términos de una ecuación diferencial.* También desde fechas tempranas, otras ramas de la Matemática como las ecuaciones en derivadas parciales, el cálculo de variaciones o la geometría diferencial llevaron a nuevos problemas y desarrollos en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La formulación de una ecuación diferencial como modelo matemático de una cierta realidad física responde, en términos generales, al siguiente planteamiento: $x = x(t)$ representa la medida (un número real) realizada en el instante t[3] de una «magnitud» que describe, a lo largo del tiempo, un cierto sistema físico (o biológico, económico, etc.; utilizaremos el término «físico» en un sentido amplio). Por ejemplo, la *posición* de un móvil que se desplaza en un medio unidimensional, la *temperatura* de un objeto, la cantidad de *radiactividad* de un lugar determinado, el número de miembros de una *población* (o la densidad de esa población), etc. $x(t)$ representa, pues, el *estado* del sistema en el instante t. Como se sabe, la *variación instantánea* de la variable $x(t)$ está dada por su función derivada $x'(t)$. Si la ley física que rige la evolución del fenómeno bajo estudio queda expresada (como fruto de conjeturas plausibles basadas en la experimentación y/o la observación) por una relación matemática, válida para todo instante t, entre $x(t)$ y su variación instantánea $x'(t)$, obtendremos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que ha de ser satisfecha por la función incógnita $x(t)$. La «dialéctica» entre realidad física y modelo matemático no acaba ahí, como es natural. Aceptada provisionalmente la ecuación diferencial como modelo de la evolución del sistema físico, habrá que estudiar dicho modelo; idealmente, encontrar las soluciones (ya hemos dicho que esto sólo es posible en contados casos), obtener propiedades de todo tipo de dichas soluciones, etc., a fin de contrastar, antes de nada, los resultados «matemáticos» así obtenidos con los obtenidos mediante experimentación y/o observación. Sólo si ese contraste es positivo, cabe «retener» la ecuación diferencial como modelo más o menos ajustado a la realidad y, a partir de ello, no limitarse a tener únicamente una representación concisa de esa realidad, sino tratar de obtener del análisis de la

[3] El tiempo t será, en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la variable independiente (real) por antonomasia. La variable dependiente $x(t)$, que tendrá distintos significados físicos en las aplicaciones, la imaginaremos geométricamente moviéndose en la recta real $\mathbb{R}$ (y más adelante en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$). En determinados contextos, sin embargo, pueden ser más apropiadas otras notaciones; por ejemplo, en problemas geométricos en el plano, será más natural utilizar x para la variable independiente e y para la dependiente, de acuerdo con las notaciones tradicionales.

ecuación diferencial nuevas informaciones sobre el fenómeno físico que no habían podido derivarse de las meras observaciones y medidas realizadas en un principio (lo que, normalmente, requerirá nuevos contrastes y nuevos puntos de vista sobre el sistema bajo estudio, enriqueciéndose así su fenomenología y análisis en esta retroalimentación entre observación y modelo matemático).

Ilustraremos el proceso descrito mediante algunas consideraciones elementales sobre la dinámica de poblaciones. La *tasa de natalidad* de, por ejemplo, una población humana (de una determinada zona) en un cierto año es el número de nacimientos habidos en ese año dividido por el tamaño de la población al comienzo del año. Se define de manera análoga la *tasa de mortalidad* (en demografía, estos cocientes tienen más bien el carácter de una probabilidad, contemplándose esa población inicial como la población que corre el riesgo de experimentar el correspondiente fenómeno a lo largo del año, y se denomina tasa —*bruta*— al cociente que resulta de dividir por la población en el momento medio del año o aún por la población media del año; para las consideraciones que van a seguir, esas distinciones son irrelevantes). Normalmente, se expresan en *tanto por mil* a fin de hacer más sencillo su manejo. La *tasa de crecimiento* es la diferencia entre tasa de natalidad y tasa de mortalidad, es decir, es la variación neta de población en un año dividida por la población a comienzos de ese año (se supone que la población permanece aislada, es decir, que no se producen migraciones). La referencia al período de un año es lo usual en demografía, pero no deja de ser una convención; podría tomarse cualquier otra unidad de tiempo y hacer las correspondientes medidas con referencia a ella. Representemos por $x(t)$ la población existente en el instante t y consideremos la variación $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ que se produce en el intervalo de tiempo Δt. Entonces, la tasa de crecimiento *media* relativa a ese período de tiempo estará dada por

$$\frac{\Delta x}{x(t)\Delta t} \tag{9}$$

En general, esa tasa media dependerá de t, Δt y $x(t)$.

Ahora, en analogía con los modelos tradicionales de la física, ejemplificados en la definición de *velocidad en un instante* t como límite de la velocidad media en intervalos de tiempo que convergen a cero, hacemos en (9) que $\Delta t \to 0$ para obtener la *tasa de crecimiento (instantánea)*

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \tag{10}$$

la cual viene a medir la «tendencia» del crecimiento de la población bajo estudio en el instante t.

Ese paso al límite puede ser cuestionable. Después de todo, el recuento de una población no se hace «continuamente» en el tiempo, sino a intervalos discretos de tiempo y, por otro lado, el número de individuos $x(t)$ es una variable discreta que toma valores enteros positivos. Se pueden encontrar justificaciones biológicas a ese paso de una variable discreta a una continua (entendiendo, por ejemplo, que $x(t)$

representa la *biomasa* de la población, que es una magnitud continua, aun en el caso en que la observación realizada se trate de un recuento o una estimación del número de individuos). Por otro lado, si $x(t)$ es grande (y los modelos en ecuaciones diferenciales se aplican a poblaciones amplias), entonces los saltos que en $x(t)$ provocan los nacimientos y muertes individuales son despreciables y se podrá suponer que $x(t)$ es una función continua e incluso derivable, de modo que sea plausible el paso al límite de (9) a (10). En cualquier caso, esta primera dificultad pone ya de manifiesto los problemas de la modelización matemática, y la simplificación realizada está más que nada justificada por los frutos, bien probados, que se obtienen al poder utilizar las eficaces técnicas del análisis matemático.

Hay situaciones, no obstante, en que el paso de lo discreto a lo continuo no está justificado. Existen muchas especies en las que las generaciones sucesivas no se superponen, con lo que su crecimiento tiene lugar a saltos discretos; es el caso de una especie que tenga una época de reproducción anual, el verano, por ejemplo, y tal que los individuos que se cruzan un año mueren antes del siguiente verano; las generaciones son, pues, *separadas:* los componentes de una generación no se cruzan nunca con los de otra. En este caso, la tasa de crecimiento vendrá dada por

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = R \tag{11}$$

donde x_n representa la población en el año n-ésimo (o periodo, o «paso temporal», adecuado a la especie en cuestión). La tasa R dependerá, en general, de n y x_n y la expresión (11) será una *ecuación en diferencias.*

Cuando las distintas generaciones se solapan, el modelo apropiado (con las salvedades hechas) será:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = R(t, x) \tag{12}$$

es decir, una ecuación diferencial ordinaria.

(El que $R(t, x)$ dependa sólo del instante t y no del pasado de la población es, nuevamente, una simplificación; significa suponer que la tasa de natalidad actúa instantáneamente y no se tiene en cuenta, por ejemplo, que es necesario un lapso de tiempo para llegar a la edad de reproducción, para que un huevo dé lugar a un adulto o para un periodo de gestación; podría haber también una respuesta retardada de la población a las limitaciones del medio, etc. Las ecuaciones diferenciales con *argumento retardado*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$$

son modelos que incorporan el efecto del pasado; se han propuesto en diversas situaciones, pero, en general, son mucho más difíciles de tratar que las ecuaciones diferenciales ordinarias.)

Una vez aceptada una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$x' = xR(t, x) \tag{13}$$

como modelo para estudiar la evolución de poblaciones biológicas, el siguiente paso, *crucial*, consiste en especificar la forma de $R(x,t)$ en el caso concreto que nos ocupe.

La «propuesta» de $R(t,x)$ ha de ser tal que las soluciones de (13), dependientes, obviamente, de $R(x,t)$, reflejen las observaciones y datos que se tengan de la población bajo estudio. Conviene señalar que, en general, al tratar de modelizar un proceso en ecología (y, más generalmente, en biología), la situación no es tan favorable como en física, donde, normalmente, están bien establecidas tanto las *variables* que son importantes como las *leyes* (traducibles a ecuaciones diferenciales) que las gobiernan. En ecología, no están tan firmemente asentadas las conjeturas sobre las leyes que puedan regir los procesos que interesa estudiar.

La hipótesis más simple es, sin duda, la de una tasa de crecimiento *constante a*, lo que conduce a la ecuación diferencial

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Que la tasa de crecimiento sea constante significa que, *cualquiera que sea t*, se tiene, para un intervalo pequeño de tiempo Δt,

$$\Delta x \cong ax(t)\Delta t = (\alpha - \beta)x(t)\Delta t \tag{15}$$

donde α y β, también constantes, son, respectivamente, la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad; $\alpha\Delta t$ es la probabilidad de que un individuo elegido al azar de origen en el intervalo Δt a un nuevo individuo (α es la probabilidad para la unidad de tiempo) y, así, $\alpha x(t)\Delta t$ es el número de nuevos individuos que nacen en el período Δt. Del mismo modo, $\beta\Delta t$ es la probabilidad de morir en el período Δt que tiene un individuo elegido al azar (β es la probabilidad para la unidad de tiempo), con lo que $\beta x(t)\Delta t$ es el número de individuos que mueren en el intervalo Δt. De ello resulta

$$\alpha x(t)\Delta t - \beta x(t)\Delta t = ax(t)\Delta t$$

como valor (aproximado) del incremento de la población en el intervalo Δt, es decir, (15).

Suponer esas probabilidades constantes implica, en particular, que no dependen del tamaño de la población (no se tiene en cuenta, por ejemplo, el efecto sobre la natalidad de las limitaciones de espacio y recursos del medio) y que la estructura por edades de la población permanece estable en el tiempo (en general, la natalidad provendrá de hecho de unas franjas concretas de la población total; en una población humana, del grupo de mujeres en edad fértil; si ese grupo fuese una fracción constante en el tiempo de la población total sí se cumpliría que el número de individuos que nacen en la unidad de tiempo es proporcional a la población total).

Aceptemos, con todo, la ecuación (14) como un posible modelo del crecimiento de una población. Se trata de una ecuación lineal (la más simple) y su estudio es muy sencillo y a la vez instructivo.

En primer lugar, es inmediato comprobar que todas las funciones de la forma

$$x(t) = Ce^{at} \tag{16}$$

con C, una constante real arbitraria, son soluciones de la ecuación. En efecto:

$$\frac{d}{dt}[Ce^{at}] = aCe^{at} = ax(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

es decir, satisfacen la ecuación (14). Además, toda solución es de ese tipo. En efecto, sea $u(t)$ una solución cualquiera de (14). Formemos la función $u(t)e^{-at}$. Se tiene:

$$\frac{d}{dt}[u(t)e^{-at}] = u'(t)e^{-at} - u(t)ae^{-at} \underset{u(t)\text{es solución}}{=}$$
$$= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Es decir, $u(t)e^{-at} =$ constante y, por tanto, $u(t)$ es de la forma (16).

Así que, en este caso, se puede decir con toda propiedad que la expresión

$$x(t) = Ce^{at}, \quad C \in \mathbb{R}$$

es la *solución general* de la ecuación (14). Pero no siempre será tan sencillo, y ni siquiera posible, el encontrar *todas* las soluciones de una ecuación diferencial.

Si se especifica a priori el valor que ha de tener $x(t)$ en un *instante inicial* $t = t_0$, entonces queda determinada una *única* solución de la ecuación: entre las funciones $x(t) = Ce^{at}$, la única que satisface la *condición inicial*

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ dado}$$

es aquella tal que

$$x(t_0) = Ce^{at_0} = x_0$$

es decir, la correspondiente a la constante $C = e^{-at_0}x_0$, o sea,

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 \tag{17}$$

En otras palabras, el *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{18}$$

tiene la *solución única* $x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$.

Con frecuencia, se toma $t_0 = 0$ para simplificar. En casos como el presente, ello no supone ninguna pérdida de generalidad (si $x(t)$ es la solución que satisface $x(0) = x_0$, entonces la función $u(t) = x(t - t_0)$ también es solución y satisface $u(t_0) = x(0) = x_0$).

Es claro que cualquier solución de la ecuación $x' = ax$ es solución de un de-

terminado problema de valor inicial de la forma (18), y viceversa, con lo que la cuestión de la existencia de soluciones de la ecuación diferencial (resuelta aquí «constructivamente» por la fórmula (16)) es equivalente a la de la existencia de soluciones del problema de valor inicial (18). Lo mismo ocurre, de hecho, para cualquier ecuación diferencial y el estudio de esa cuestión esencial se hará, en general, bajo el planteamiento de un problema de valor inicial. Ello se debe al claro significado físico que éste posee: en el estudio de un cierto proceso físico se espera, desde un punto de vista determinista, que, con el conocimiento del *estado inicial* del sistema (la condición inicial), la ecuación diferencial (que se supone que refleja apropiadamente la ley que gobierna el proceso) permitirá *predecir*, de manera inequívoca, la evolución subsiguiente del proceso[4]. Ello se traduce en las «exigencias» de *existencia* (por razones obvias) y de *unicidad* (para que no haya ambigüedad en el desarrollo del proceso) de la solución de un problema de valor inicial. Ambos requisitos son satisfechos, como hemos visto, por el problema (18). Para ecuaciones diferenciales generales, la cuestión no es, claro, tan simple y su estudio constituye una de las partes fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Volviendo al ámbito de la dinámica de poblaciones vemos que, bajo la «ley» de crecimiento reflejada en la ecuación $x' = ax$, una población inicial de $x_0 > 0$ individuos crecerá (supuesto, naturalmente, que $a > 0$, o sea, que la natalidad domina a la mortalidad) de acuerdo con la fórmula exponencial:

$$x(t) = e^{at}x_0$$

Se trata de un *crecimiento ilimitado* («malthusiano») y se tiene[5]:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty$$

Aunque en ciertos períodos históricos se ha observado para poblaciones humanas ese crecimiento exponencial, es obvio que una población no puede crecer sin límite. Por eso se hace necesario establecer modelos más realistas en el estudio de poblaciones humanas y de otras especies. De todos modos, en ciertos casos, como en el estudio de cultivos de bacterias (que se reproducen por división), el modelo exponencial se ha comprobado que resulta válido mientras la población es lo bastante pequeña para que no intervengan limitaciones del medio (espacio, cantidad de nutriente, etc.). Y aun para poblaciones humanas, puede servir al menos para establecer estimaciones mínimas para la población de una ciudad o un estado en un

---

[4] Una vez más, la adopción de un modelo determinista como es una ecuación diferencial, puede no ser realista. La elección se justifica en buena parte por la riqueza de métodos y resultados de la teoría de las ecuaciones diferenciales, dado que la incorporación de elementos aleatorios lleva a modelos estocásticos que son muchísimo más difíciles, cuando no imposibles, de tratar matemáticamente. Por otra parte, son los propios modelos deterministas los que en ocasiones dan la pista para intentar realizar un estudio estocástico.

[5] La contrapartida discreta de la ecuación diferencial $x' = ax$ es la *ecuación en diferencias* $x_{n+1} - x_n = ax_n$, cuyas soluciones están dadas por $x_n = C(a+1)^n$, con C constante arbitraria. C queda univocamente determinada por la población inicial: $x_n = x_1(a+1)^{n-1}$. Si $a > 0$, se tendrá también que $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$.

plazo limitado de tiempo (por ejemplo, si la tasa de crecimiento de la población de una ciudad se espera que sea de, al menos, el 2,5 por 100 a cinco años vista y la población actual es de 400.000 habitantes, ¿qué población habrá como mínimo dentro de cinco años? Este tipo de estimaciones serán útiles a la hora de planificar a medio plazo: demanda de energía, de alimentos, etc.).

Señalemos, por fin, que este modelo exponencial aparece también en otras situaciones muy diversas, y con plena vigencia en las aplicaciones prácticas. Es el caso del *interés compuesto* cuando el capital se compone «continuamente», lo que lleva a cálculos más sencillos que cuando se compone a intervalos discretos de tiempo (en este caso, la constante a en la ecuación $x' = ax$ es la tasa de interés expresada en tanto por uno), y del proceso de *desintegración de una sustancia radiactiva*; aquí se acepta que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegración en la unidad de tiempo y que esa probabilidad no depende del momento en que tenga lugar ni de la cantidad de masa presente en cada instante, denotada por $x(t)$. Ello lleva a la ecuación diferencial

$$x' = -\lambda x, \quad \lambda > 0$$

(El signo negativo es debido a que se produce, a lo largo del proceso, un decrecimiento de la masa.)

Las soluciones

$$x(t) = e^{-\lambda t} x_0$$

reflejan un decrecimiento exponencial de la masa; la constante λ, llamada *constante de desintegración*, es una característica de cada sustancia radiactiva y se determina mediante observaciones. El modelo se utiliza, por ejemplo, en la determinación de fechas mediante el carbono-14, isótopo radiactivo del carbono (véase capítulo 1).

Lo que ocurre con la ecuación $x' = ax$ es muy frecuente: un mismo modelo matemático se utiliza en situaciones prácticas muy diversas; puede ocurrir entonces que cuestiones que se suscitan, y eventualmente resuelven, en una de ellas, se puedan trasladar, con la apropiada interpretación, a otra(s) de ellas; es el caso de buen número de nociones, métodos y resultados de la física, la ciencia con más larga tradición de relaciones fructíferas con la matemática, que se utilizan ahora para discutir problemas en otras áreas.

La ecuación logística. Como decíamos, resulta obvio que ninguna población puede crecer indefinidamente a una tasa constante. Cuando una población llega a ser demasiado numerosa, aparecen restricciones del medio en forma de limitación de espacio, de recursos, etc., que harán disminuir la tasa de crecimiento o, incluso, la harán negativa provocando que la población disminuya. Es más realista suponer que el medio sólo puede sostener de manera «estable» un máximo K de población (la *capacidad de soporte* del medio), de modo que si $x(t)$ estuviese por encima de K, la tasa sería negativa y la población decrecería acercándose a K; si $x(t) = K$, la tasa sería nula y, por tanto, la población constante, y, finalmente, si $x(t)$ se mantiene por debajo de K, la tasa será positiva, creciendo entonces la población, aunque menos

rápidamente cuanto más próxima esté a ese valor K. La manera más simple de reflejar matemáticamente ese comportamiento es imponer que la tasa de crecimiento x'/x sea proporcional a la diferencia $(K - x)$. Se tiene así la denominada *ecuación logística:*

$$x' = \frac{a}{K} x(K - x) \tag{19}$$

propuesta por Verhulst en 1836. Si escribimos la ecuación en la forma

$$x' = ax - \frac{a}{K} x^2 \tag{20}$$

se sugiere que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong ax - \frac{a}{K} x^2$$

es decir, que la variación media de la población en un intervalo pequeño de tiempo Δt es menor en $(a/K)x^2$ de lo que sería sin la competencia que se establece entre los miembros de la población por unos recursos limitados. Cabe interpretar el término $(a/K)x^2$ como una medida de la «fricción social», proporcional al número de encuentros posibles entre los $x(t)$ individuos que forman la población. Por otro lado, si x es mucho más pequeño que K, entonces $K - x \cong K$, y queda $x' = ax$, es decir, x crece exponencialmente cuando todavía es pequeño y no se dejan sentir las restricciones del medio. Por el contrario, si x está próximo a K ($x \cong K$), entonces $x' \cong a(K - x)$ o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}(K - x) = -a(K - x)$$

de modo que $x(t) \to K$ cuando $t \to \infty$, es decir, la población «se estabiliza», a la larga, en el valor K.

Los argumentos precedentes justifican la elección de esta ecuación logística como modelo de una cierta generalidad para el crecimiento de la población de una especie en un medio que siempre impondrá unas restricciones más o menos severas. Pero no dejan de ser unos argumentos, por así decir, «a posteriori», pues, como señala J. Maynard Smith en [10][6], «la ecuación logística no se ha derivado de ningún conocimiento o hipótesis acerca del modo concreto en que la reproducción está influenciada por la densidad (de población)». Siguiendo a dicho autor, cabe decir que la ecuación logística se ha propuesto como modelo de crecimiento de poblaciones por ser la expresión matemática más sencilla que combina un crecimiento exponencial para x pequeño y una «estabilización», cuando $t \to \infty$, en el valor constante K, quedando además corroborado el acierto de la elección por el ajuste muy satisfactorio que se da entre las soluciones de la ecuación (cuya forma enseguida veremos) y la evolución observada de numerosas poblaciones.

[6] Se recomienda esta obra, así como Murray [11], para profundizar en estas cuestiones.

La ecuación logística es, pues, una ecuación «descriptiva», en el sentido de que su justificación está en esa descripción satisfactoria que ofrece de la evolución de la variable población en función de la variable tiempo en numerosas situaciones, a diferencia de la ecuación $x' = ax$ que, con todas sus limitaciones, no sólo describe apropiadamente la evolución de ciertas poblaciones (en intervalos finitos de tiempo), sino que su justificación está también derivada de la *observación* del comportamiento de los *individuos* que componen la población, observación que lleva a conjeturar hipótesis plausibles sobre la evolución del *conjunto* de la población, aunque no sean hipótesis muy generales (estos dos tipos de ecuaciones o leyes, las descriptivas y las que derivan además su justificación del comportamiento observado o postulado de los componentes del sistema, se presentan en las distintas ciencias).

La ecuación logística es una ecuación *no lineal*. Antes de nada observemos que posee dos soluciones muy especiales: las funciones constantes $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv K$; por mantenerse constantes en el tiempo se dice que son soluciones *estacionarias* o de *equilibrio*. Si la población «comienza», en $t = 0$, en el valor 0 o en el valor K, se mantendrá para siempre (y siempre estuvo) en ese valor.

Aunque es algo más complicada que la ecuación lineal $x' = ax$, todavía es posible encontrar fácilmente la *solución general* de la ecuación (19), reduciéndola precisamente, mediante cambios de «variable dependiente», a la ecuación $x' = ax$. En efecto, si se introduce la nueva variable

$$v(t) = \frac{1}{x(t)} \tag{21}$$

entonces la función $v(t)$ satisface la ecuación

$$v' = a\left(\frac{1}{K} - v\right) \tag{22}$$

Si ahora hacemos el cambio $z = (1/K) - v$, la función $z(t)$ satisfará la ecuación

$$z' = -az \tag{23}$$

cuya solución general, como sabemos, es

$$z(t) = Ce^{-at}$$

Deshaciendo los cambios realizados tendremos para la ecuación logística las soluciones

$$x(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-at}} \tag{24}$$

con C constante real arbitraria. Nótese que la función $x(t) \equiv 0$, que sabemos que es solución, no está incluida en la expresión (24) (que no será entonces la *solución*

general, estrictamente hablando). Ello no es extraño, pues al hacer el cambio $v = 1/x$ había quedado excluido precisamente el valor cero para la variable x. Los cambios de variables se utilizan en el estudio de las ecuaciones diferenciales a fin de simplificar el análisis de ciertos problemas, de modo análogo a lo que se hace en otros campos del análisis matemático (por ejemplo, en el cálculo integral, donde, como en el caso presente, hay que «seguir la pista» del campo de validez del cambio de variables que se utilice).

La constante C queda, aquí también, unívocamente determinada si se prefija una población inicial $x(0) = x_0$. En efecto, se comprueba que la solución única del *problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = ax(1 - x/K) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{25}$$

está dada por

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-at}} \tag{26}$$

(En esta expresión sí queda recogida la solución $x(t) \equiv 0$, correspondiente a la condición inicial $x_0 = 0$.)

Obsérvese que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = K$$

cualquiera que sea la condición inicial $x_0 \neq 0$. Es decir, la población se estabiliza a largo plazo en el valor K (capacidad de soporte del medio en que aquélla evoluciona) independientemente del tamaño inicial del que parta (excepto si $x_0 = 0$, naturalmente). La solución estacionaria $x(t) \equiv K$ se dice que es *(asintóticamente) estable* por esa propiedad que tiene de que todas las demás soluciones (excepto la trivial) convergen a ella cuando $t \to \infty$ (la solución estacionaria $x(t) \equiv 0$ es, por el contrario, *inestable:* en cuanto x_0 es distinto de 0, por pequeño que sea, la correspondiente solución se aleja de ella). La detección y propiedades de las soluciones estables constituyen un objetivo importantísimo en la teoría de ecuaciones diferenciales, ya que, como regla general, dichas soluciones representan los comportamientos *observables* (los comportamientos «reales» a largo plazo[7]) del sistema físico bajo estudio.

El aspecto de las gráficas de las soluciones de la ecuación logística se muestra en la figura 1. Se representa únicamente el primer cuadrante, teniendo en cuenta que en nuestro caso, tomando como instante inicial $t_0 = 0$, interesa la evolución futura de la población y que sólo tienen sentido físico poblaciones no negativas. Las funciones definidas por (26) tienen perfecto sentido, sin embargo, para valores $x_0 < 0$ y $t \in (-\infty, 0)$.

[7] O acaso, los comportamientos aparentes, si es que se piensa que la ciencia consiste en «explicar las apariencias o fenómenos con ayuda de unas medidas».

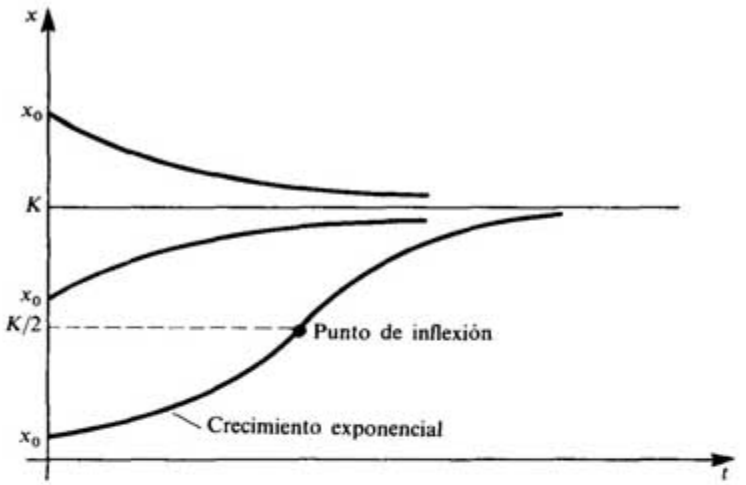


Figura 1

Las gráficas de la figura anterior pueden realizarse, naturalmente, mediante las técnicas usuales (crecimiento, concavidad, etc.) de dibujo de curvas, aplicadas a las funciones definidas por (26). Pero, en realidad, la mayor parte de sus características se podrían haber obtenido sin necesidad de conocer explícitamente las soluciones de la ecuación diferencial; basta, en efecto, «trabajar» directamente con la ecuación diferencial. Veamos: sin necesidad de ningún *método de integración* se conocen inmediatamente dos soluciones especiales, las soluciones estacionarias $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv K$ (en cualquier ecuación diferencial de la forma $x' = f(x)$, o sea, con el segundo miembro independiente de t, es claro que los ceros de la función f son soluciones constantes de la ecuación diferencial). Ser $x(t)$ solución quiere decir que $x(t)$ verifica

$$x'(t) = \frac{a}{K} x(t)(K - x(t)) \tag{27}$$

Tenemos entonces, en cuanto al crecimiento, que

— si $x < K$, $x' > 0$, y, por tanto, $x(t)$ crece, y
— si $x > K$, $x' < 0$, y, por tanto, $x(t)$ decrece.

(Recuérdese que se consideran sólo valores de x positivos.)

En cuanto a la concavidad, derivando en (27) se tiene:

$$x'' = \frac{d}{dt}\left[\frac{a}{K} x(K - x)\right] = \frac{a}{K} x'(K - x) - \frac{a}{K} xx' = \frac{a}{K} x'(K - 2x)$$

Hay entonces puntos de inflexión en $x = K/2$ y se tienen las concavidades que se observan en la figura para las distintas gráficas. Naturalmente, se necesitan desarro-

llos teóricos de cierta importancia para justificar todos los rasgos de dicha figura, pero ese tipo de argumentos indirectos y cualitativos son de la mayor importancia cuando se trata de estudiar ecuaciones (la mayoría) para las que no es posible encontrar explícitamente las soluciones. Por ejemplo, no es difícil probar que las soluciones de la ecuación logística poseen derivadas segundas (de hecho, de cualquier orden) continuas, lo que legitima la derivación que se ha realizado para analizar la concavidad («léase» de nuevo la ecuación y obsérvese que, por definición de solución, el segundo miembro de (27) es una función con derivada primera continua; luego lo mismo ocurrirá con $x'(t)$, que es el primer miembro. Lo mismo cabe argumentar en la expresión que da $x''(t)$, y así sucesivamente).

Por otro lado, el teorema de existencia y unicidad de solución del correspondiente problema de valor inicial justifica que las gráficas de las soluciones *no se pueden cortar* y que, en particular, si se empieza con un valor inicial $0 < x_0 < K$, siempre será $0 < x(t) < K$, ya que $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv K$ son soluciones de la ecuación (y lo análogo si $x_0 > K$). No está claro a priori, sin resolver explícitamente la ecuación, que las soluciones estén definidas para todo $t \geqslant 0$, pero hay un resultado que garantiza que si $x(t)$ permanece acotada en su intervalo de definición, entonces éste ha de ser necesariamente $[0, \infty)$ (esto también se aplica a las soluciones con $x(0) > K$, pues para ellas $x' < 0$ y, por tanto, $K < x(t) \leqslant x(0)$ para todo t de su intervalo de definición).

También se puede justificar el comportamiento asintótico que se observa en la figura 1 sin apelar a la fórmula explícita (26). En efecto, hemos visto que si, por ejemplo, $0 < x_0 < K$, la correspondiente solución $x(t)$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y verifica $x(t) < K$ para todo $t \in (0, \infty)$, con lo que existirá $\lim x(t) = p \leqslant K$ cuando $t \to \infty$. Pero también probaremos que si una solución $x(t)$ de una ecuación de la forma $x' = f(x)$ converge a un número p cuando $t \to \infty$, entonces, necesariamente, la función constante $x(t) \equiv p$ es solución de la ecuación. Pero las únicas soluciones constantes de la ecuación logística son $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv K$, y es claro que si $x(0) > 0$ y $x'(t) > 0$, $x(t)$ no puede converger a 0 cuando $t \to \infty$. Así pues, $\lim x(t) = K$ cuando $t \to \infty$, y lo mismo se tiene cuando $x_0 > K$. En fin, mediante argumentos de este tipo, es posible para muchas ecuaciones diferenciales, como ocurre para la ecuación logística, llegar a disponer de una descripción cualitativa muy completa del comportamiento de sus soluciones y, en definitiva, del sistema físico modelado por la ecuación en cuestión.

En las aplicaciones a la biología (y también a la economía) hay que tener en cuenta, además, que, como se dijo antes, las conjeturas sobre las leyes que puedan regir los procesos que interesa modelar no tienen la «firmeza» de las leyes de la física clásica, y podría ser un error tratar de precisar las funciones que definen la ecuación diferencial, pues el análisis detallado de una ecuación concreta, aparte de que puede resultar muy difícil, podría enmascarar las características más relevantes del fenómeno bajo estudio. Puede ser más fructífero manejar únicamente los principales rasgos cualitativos de dichas funciones (o sea, de la ley que se conjetura) en cuanto a crecimiento (derivadas primeras), concavidad (derivadas segundas), etc., los cuales, en los casos favorables, pueden ser suficientes para obtener resultados variados e interesantes sobre las propiedades cualitativas de las soluciones de la ecuación diferencial.

Señalemos, para terminar, que, como en el caso de $x' = ax$, la ecuación logística aparece en contextos muy diversos: difusión de enfermedades contagiosas (se supone que la enfermedad se propaga por contactos entre individuos infectados, en número de $x(t)$, con los no infectados, en número de $K - x(t)$, siendo K la población total susceptible de contraer la enfermedad, y ello a un ritmo proporcional al número de contactos posibles, lo que conduce a la ecuación $x' = rx(K - x)$), reacciones químicas autocatalíticas, etc.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Al lado de ecuaciones individuales que implican a una función y su derivada, son también de gran interés los *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Son muy frecuentes en las aplicaciones situaciones en las que el estado de un sistema físico está descrito por dos o más variables, $x_1, ..., x_n$, de tal manera que la variación de x_i, dada por x_i', depende no sólo de t y de x_i, sino también de las restantes variables x_j, $j \neq i$. Por ejemplo, la ecología de poblaciones, de la que analizaremos algunos modelos, se ocupa del estudio del crecimiento e interacción de dos o más especies que comparten un mismo medio. Un *sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias con n incógnitas* tiene la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{28}$$

Se consideran ya las distintas ecuaciones dadas en *forma normal.* Es posible pasar a esta forma normal bajo condiciones muy generales (las condiciones de aplicabilidad del teorema de la función implícita) que se satisfarán en la gran mayoría de las aplicaciones prácticas. Una *solución* de (1) será una n-upla de funciones $\{x_1(t), ..., x_n(t)\}$, definidas en un cierto intervalo I de $\mathbb{R}$, tales que

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \quad i = 1, ..., n, \quad \text{para todo } t \in I$$

El *problema de valor inicial* para el sistema (28) consistirá en encontrar una solución que satisfaga una *condición inicial* del tipo

$$x_1(t_0) = x_1^0, \; x_2(t_0) = x_2^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$$

donde t_0 y $x_1^0, ..., x_n^0$ son números reales dados. Probaremos bajo condiciones muy generales que dicho problema de valor inicial posee una única solución.

Para abordar el estudio de sistemas de ecuaciones conviene introducir notaciones más concisas mediante el uso del lenguaje vectorial. Consideraremos los valores

en cada t de las n funciones reales $x_1(t), ..., x_n(t)$ como componentes de un vector columna n-dimensional:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Se tiene así definida una *función vectorial* $t \mapsto x(t)$, que nombraremos también por $x(t)$, de un intervalo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Las funciones *escalares* $x_1(t), ..., x_n(t)$ se dice que son las *componentes* de $x(t)$.

Las funciones vectoriales pueden también depender de varias variables independientes, y así, siendo

$$f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)$$

los valores de las funciones $f_1, ..., f_n$ en el punto $(t, x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, se puede definir

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{bmatrix}$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Queda así definida una función

$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

de un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$.

Una función vectorial es *continua* si lo es cada una de sus componentes. De manera análoga, una función vectorial se puede derivar o integrar realizando la correspondiente operación en cada una de sus componentes. Así, si

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

es tal que todas sus componentes $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$ son derivables en $t = t^*$, entonces

$$\frac{dx(t^*)}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t^*)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t^*)}{dt} \end{bmatrix}$$

y si las $x_i(t)$ son derivables en todo un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces queda definida en él la función derivada

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

(Como en las funciones escalares se utilizan también las notaciones $x'(t)$ y $\dot{x}(t)$.)

Asimismo, si las funciones $x_i(t)$ son continuas en el intervalo $[t_1, t_2]$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x_n(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Con estas notaciones, el sistema (28) se puede escribir de manera condensada en la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{29}$$

o sea, la misma forma que para una única ecuación ($n = 1$), pero ahora entendiendo que las funciones implicadas toman valores vectoriales. En ocasiones nos referiremos al sistema (29) con el término *ecuación vectorial*, reservando el de *ecuación escalar* para el caso $n = 1$. Cuando el contexto esté claro, utilizaremos simplemente el término *ecuación (diferencial ordinaria)* para referirnos a (29), sea cual sea el valor de n.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Hasta aquí hemos prestado atención a las ecuaciones de primer orden y a los sistemas compuestos por ecuaciones de este tipo. Pero también interesa estudiar las ecuaciones de orden superior al primero, es decir, aquellas en las que intervienen no sólo la derivada primera de la función incógnita, sino también derivadas de orden superior a uno. Son especialmente importantes las ecuaciones de segundo orden, debido a que diversas leyes fundamentales de la física son expresables en forma de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Así, la *segunda ley de Newton*,

$$\text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

toma la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{30}$$

donde $x(t)$ representa el desplazamiento de una partícula de masa m a lo largo de un eje Ox, $x'(t)$ su velocidad, $x''(t)$ su aceleración y f la fuerza que se aplica (y que produce dicha aceleración). La forma concreta de f dependerá del sistema mecánico de que se trate en cada caso. El problema mecánico de la descripción por la función $x(t)$ del movimiento de la partícula sometida a la fuerza f queda reducido al de la resolución de la ecuación diferencial (30).

Un caso muy simple es el de la *caída libre* de cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre. En él,

$$f = mg$$

donde g es la aceleración de la *gravedad*. La ecuación (30) toma la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

cuya resolución es, en realidad, un sencillo problema de cálculo de primitivas. En efecto, se tiene:

$$x'(t) = gt + C_2$$

y, por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_2t + C_1$$

Se aprecia cómo la *solución general* depende de *dos* constantes arbitrarias. Alternativamente, queda determinada una *solución única* si se prefijan la *posición* y la *velocidad iniciales*, ya que

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \\ x'(0) = C_2 \end{cases}$$

lo que parece corresponder a nuestra intuición física: lo que está «en nuestra mano» para determinar un único movimiento, bien definido, a partir del instante inicial, es la posición y velocidad iniciales.

Esto es general: bajo hipótesis muy generales, veremos que el *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(t_0) = x_1,\ x'(t_0) = x_2 \end{cases} \tag{31}$$

tiene una solución única. Enseguida veremos otra razón de por qué (31) es efectivamente el problema de valor inicial apropiado a una ecuación de segundo orden.

Otra ecuación clásica de segundo orden es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{32}$$

cuyas soluciones describen los movimientos de un *péndulo* (Fig. 2), considerado éste como un punto material de masa m suspendido de una cuerda de longitud l y cuyos movimientos tienen lugar en un plano (despreciando el rozamiento del medio).

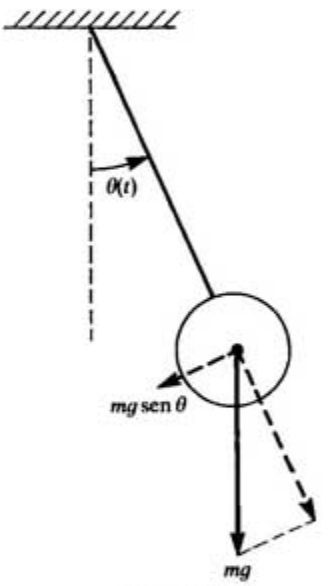


Figura 2

$$\text{Fuerza} = -mg\operatorname{sen}\theta = ml\theta'' = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

$\theta(t)$ denota el ángulo que forma con la vertical la posición del péndulo en el instante t. La ecuación (32) es una ecuación *no lineal* a causa del término $\operatorname{sen}\theta$. Si se consideran únicamente movimientos de pequeña amplitud, se puede suponer que $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, obteniéndose la ecuación *lineal* más sencilla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{33}$$

Ésta es la ecuación del *movimiento armónico simple*, cuya solución general, como veremos en el capítulo 4, está dada por la expresión

$$\theta(t) = C_1 \operatorname{sen}\omega t + C_2 \cos\omega t \tag{34}$$

donde $\omega^2 = g/l$. Observamos, de nuevo, que la solución general depende de dos constantes arbitrarias y que queda determinada unívocamente una solución si prefijamos $\theta(0)$ y $\theta'(0)$. El análisis *local* (en las proximidades de $\theta = 0$, o sea, con θ pequeño) que permite la ecuación (33) de los movimientos del péndulo descritos originariamente por la ecuación no lineal (32) es un ejemplo de la aproximación que se ha mencionado de una ecuación no lineal por una lineal. No es, sin embargo, un ejemplo «típico», a pesar de la relevancia histórica del *oscilador armónico*. La aproximación, válida hasta cierto punto, de la ecuación (32) por la (33) es algo excepcional, como veremos en *Ecuaciones diferenciales II*. Cuando se considera el rozamiento del medio (estimado, por ejemplo, como una fuerza proporcional a la velocidad que se opone al movimiento) la validez de la aproximación deriva, por el contrario, de un resultado general bien establecido (la ecuación (32) queda sustituida por la ecuación

$$\theta'' + (k/m)\theta' + (g/l)\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \text{con } k > 0$$

y la aproximación lineal en las proximidades de $\theta = 0$ será:

$$\theta'' + (k/m)\theta' + (g/l)\theta = 0)$$

Aunque hay situaciones particulares en las que es posible una reducción a ecuaciones de prime orden (por ejemplo, no es difícil obtener mediante procedimientos elementales la fórmula (34)), la resolución de una ecuación de segundo orden (y, en general, de una ecuación de orden n) es, en general, muy difícil. La cuestión se abordará reduciendo las ecuaciones de orden superior a sistemas de ecuaciones de primer orden, como se expone a continuación. Una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* tiene la forma general

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0 \tag{35}$$

donde F es una función definida en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Supondremos, como en los casos de ecuaciones y sistemas de primer orden, que la ecuación está ya dada en *forma normal:*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) \tag{36}$$

Se supone que f es una función continua en un cierto subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Una función $x(t)$ se dice que es *solución* de la ecuación (36) en un intervalo I de $\mathbb{R}$ si tiene derivadas hasta el orden n-ésimo continuas en I, y verifica:

a) $(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \in D$, para todo $t \in I$.

b) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$, para todo $t \in I$.

(La condición *a*) da sentido a la *b*).)

La reducción de la ecuación (36) a un sistema de ecuaciones se basa en el cambio de variables trivial

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x' = x_2 \\ x'' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x^{(n-2)} = x_{n-1} \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases} \tag{37}$$

mediante el cual la ecuación (36) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{38}$$

es decir, como un sistema de n ecuaciones de primer orden. La ecuación (36) y el sistema (38) son equivalentes en el sentido de que a la solución $x(t)$ de la ecuación (36) le corresponde la solución del sistema (38) dada por la n-upla de funciones

$$(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

y a la solución $(x_1(t), ..., x_n(t))$ del sistema (39) le corresponde la solución $x(t) = x_1(t)$ (o sea, la primera componente de la n-upla) de la ecuación (36).

El cambio de variables (37) permite, pues, tratar las ecuaciones de orden n en el marco de los sistemas de primer orden o *ecuaciones vectoriales*. En este marco, se comprende por qué el problema de valor inicial apropiado a las ecuaciones de orden n es el correspondiente a prefijar los *valores iniciales*

$$x(t_0) = x_1^0, x'(t_0) = x_2^0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$$

El mismo procedimiento se puede aplicar a sistemas de ecuaciones de cualquier orden:

$$\begin{cases} x_1^{(n_1)} = f_1(t, x_1, x_1', ..., x^{(n_1-1)}, x_2, ..., x_k^{(n_k-1)}) \\ \quad \vdots \\ x_k^{(n_k)} = f_k(t, x_1, x_1', ..., x^{(n_1-1)}, x_2, ..., x_k^{(n_k-1)}) \end{cases} \tag{39}$$

Cada ecuación de orden $n_j > 1$ se desglosa en n_j ecuaciones de primer orden, pasando así del sistema (39) a un sistema de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, si la ecuación (30) derivada de la segunda ley de Newton se aplica a movimientos que tengan lugar en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, entonces $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ representa la posición del móvil en $\mathbb{R}^3$, la fuerza f tendrá tres componentes f_1, f_2, f_3, y (30) será en realidad un sistema de tres ecuaciones de

segundo orden que, mediante el cambio de variables (37), será equivalente a un sistema de seis ecuaciones de primer orden en seis incógnitas.

En definitiva, cualquiera de los problemas considerados, abarcando una enorme generalidad, se puede escribir en la forma de un sistema de ecuaciones de primer orden o «ecuación vectorial»

$$x' = f(t, x)$$

donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f(t, x)$ es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$. Bajo esta forma unificada se abordará el estudio general de las ecuaciones diferenciales ordinarias, atendiendo, naturalmente, a los métodos y resultados especiales que existen para las ecuaciones escalares.

1 Ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones lineales de primer orden se pueden integran siempre. Esto quiere decir que se puede establecer (muy fácilmente, como se ve en el apartado 1.1) una fórmula, dependiente de un parámetro arbitrario, que proporciona *todas* las soluciones de la ecuación. La fórmula incluye el cálculo de dos primitivas, con lo que, si éstas se pueden expresar en términos de funciones elementales, las soluciones se conocerán de manera completamente explícita, tal como esto se entiende en cálculo elemental.

Las ecuaciones lineales de primer orden tienen, a pesar de su sencillez, interesantes aplicaciones. En el apartado 1.2 se exponen algunas de ellas, así como la razón de por qué las ecuaciones lineales vienen a ser una «primera aproximación» en el estudio de procesos físicos muy diversos.

1.1. Solución general y problema de valor inicial

La forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son dos funciones definidas y continuas en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos en primer lugar la ecuación *homogénea*

$$x' = a(t)x \tag{2}$$

y tratemos de hallar sus soluciones. Supongamos que la función $x(t)$ es solución de la ecuación (2), es decir, que verifica

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$, y supongamos por el momento que $x(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$ (esto implica que $x(t)$ no cambia de signo en (α, ω), por el teorema del valor

intermedio; después se verá que esta hipótesis suplementaria sólo excluye a la solución trivial $x(t) \equiv 0$). Entonces, $x(t)$ satisface

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t)$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}(\ln |x(t)|) = a(t)$$

y, por tanto,

$$\ln |x(t)| = \int^t a(s)ds + C$$

para una cierta constante C (por $\int^t a(s)ds$ se indica una primitiva concreta de $a(t)$, pero sin precisar cuál de ellas; por eso no se especifica el límite inferior de integración, que ha de ser un punto de (α, ω)). Equivalentemente,

$$x(t) = K \exp\left(\int^t a(s)ds\right) \tag{3}$$

para una cierta constante K.

Conjeturamos entonces que *cualquier* función $x(t)$ de la forma (3), es decir, con cualquier constante real K, es solución de la ecuación (2). En efecto,

$$\frac{d}{dt}\left(K \exp\left(\int^t a(s)ds\right)\right) = a(t)\left(K \exp\left(\int^t a(s)ds\right)\right)$$

y esto para todo $t \in (\alpha, \omega)$, que es el intervalo en que está definida y es continua la función $a(t)$ y donde, en consecuencia, es válido el cálculo precedente.

Además, *toda solución* de la ecuación (2) es de esa forma (3). En efecto, sea $u(t)$ una solución cualquiera. Si formamos la función

$$u(t) \exp\left(-\int^t a(s)ds\right)$$

(como hacíamos en la introducción para el caso particular en que $a(t) = a$, constante) se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) \exp\left(-\int^t a(s)ds\right)\right) = u'(t) \exp\left(-\int^t a(s)ds\right) -$$

$$-a(t)u(t)\exp\left(-\int^t a(s)ds\right) = \text{(por ser } u(t) \text{ solución)} =$$

$$= a(t)u(t)\exp\left(-\int^t a(s)ds\right) - a(t)u(t)\exp\left(-\int^t a(s)ds\right) =$$

$$= 0, \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega)$$

Es decir,

$$u(t)\exp\left(-\int^t a(s)ds\right) = \text{constante},$$

y, por tanto, $u(t)$ es de la forma (3).

Podemos decir, entonces, que la expresión (3) es la *solución general* de la ecuación lineal homogénea (2).

Alternativamente, si nos planteamos el *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = a(t)x \\ x(t_0) = x_0, \quad \text{con} \quad t_0 \in (\alpha, \omega), \ x_0 \in \mathbb{R} \text{ dados} \end{cases} \tag{4}$$

vemos que la función

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \tag{5}$$

es solución de dicho problema (es de la forma (3) y satisface la condición inicial) y que esta solución es única. Esto último, porque imponiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$ en la expresión de la solución general queda determinado unívocamente el valor de la constante K:

$$K = x_0 \exp\left(-\int^{t_0} a(s)ds\right)$$

Aunque sea simple, no merece la pena memorizar la fórmula (3) que da las soluciones de la ecuación (2). Es más práctico reproducir los argumentos heurísticos que conducen a ella: se «separan las variables» en la ecuación:

$$\frac{x'}{x} = a(t)$$

y se integra respecto a t cada miembro (si es posible) mediante las reglas del cálculo de primitivas:

$$\ln|x(t)| = \int^t a(s)ds + C$$

para obtener la fórmula (3). Si se trata de resolver un problema de valor inicial, se impone en esa fórmula la condición inicial y ello dará el correspondiente valor único de la constante K (este método de «separación de variables», debidamente, como aquí, justificado, es también aplicable a cierta clase de ecuaciones no lineales).

Las fórmulas (3) y (5) son útiles, por su parte, para comprender la estructura de las soluciones de la ecuación (2). Por ejemplo, una observación simple pero importante es que *el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea constituye un espacio vectorial de dimensión 1*. La primera parte de esta afirmación se deriva, en realidad, de la propia ecuación, sin necesidad de conocer la fórmula (3). Introduzcamos el *operador diferencial*

$$L = \frac{d}{dt} - a(t) \tag{6}$$

que actúa sobre funciones continuas y con derivada primera continua en el intervalo (α, ω) en la forma

$$Lu = \frac{du}{dt} - a(t)u \tag{7}$$

Se trata de un operador *lineal*, lo que quiere decir que si u_1, u_2 son dos de tales funciones, y si k_1, k_2 son dos números reales cualesquiera, entonces:

$$L(k_1u_1 + k_2u_2) = k_1Lu_1 + k_2Lu_2$$

como se comprueba inmediatamente.

Resolver la ecuación $x' = a(t)x$ es equivalente a encontrar las funciones $x(t)$, continuas y con derivada continua en (α, ω), tales que[1]:

$$L(x(t)) = 0 \tag{8}$$

Es claro entonces que si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son dos soluciones y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$L[k_1x_1(t) + k_2x_2(t)] = k_1L[x_1(t)] + k_2L[x_2(t)] = 0$$

es decir, la combinación lineal de soluciones también es solución. El conjunto de éstas forma, pues, espacio vectorial. Que es de dimensión 1 se ve en la propia fórmula (3) que da la solución general (como también, claro, la propiedad de formar espacio vectorial).

Pasemos ahora a considerar la ecuación lineal *completa* (o *no homogénea*)

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1}$$

---

[1] O sea, resolver la ecuación (2) consiste en hallar el núcleo de la aplicación lineal $L: \mathscr{C}^1(\alpha, \omega) \to \mathscr{C}(\alpha, \omega)$ definida por (6) y (7) (véase apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor).

que, con la notación anterior, puede escribirse en la forma

$$Lx = b(t) \tag{1'}$$

La ecuación

$$x' = a(t)x \tag{2}$$

se dice que es la ecuación homogénea *asociada* a (1).

Se tiene lo siguiente:

a) Si $x_0(t)$ es una solución de la ecuación homogénea (2) y $x_p(t)$ es una solución de la ecuación completa (1), entonces $x_0(t) + x_p(t)$ también es solución de (1). En efecto:

$$L[x_0(t) + x_p(t)] = L[x_0(t)] + L[x_p(t)] = 0 + b(t) = b(t)$$

b) Recíprocamente, si $x(t)$ es otra solución cualquiera de la ecuación (1), entonces

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

donde $x_0(t)$ es solución de la ecuación homogénea (2). En efecto, poniendo

$$x_0(t) = x(t) - x_p(t)$$

se tiene

$$L[x(t) - x_p(t)] = L[x(t)] - L[x_p(t)] = b(t) - b(t) = 0$$

Hemos probado, por tanto, el siguiente resultado:

La solución general de la ecuación lineal completa (1) *viene dada por la expresión*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{9}$$

donde $x_h(t)$ *representa la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada* (2), *y* $x_p(t)$ *es una solución particular (cualquiera) de la ecuación completa* (1)[2].

Así pues, para hallar la solución general de la ecuación lineal

$$x' = a(t)x + b(t)$$

---

[2] En el lenguaje del álgebra lineal: la imagen inversa de $b(t)$ por la aplicación L (el conjunto de funciones tales que $L[x(t)] = b(t)$) se obtiene sumando al núcleo de L (imagen inversa de la función $x(t) \equiv 0$) *una* imagen inversa concreta de $b(t)$. El conjunto de soluciones de la ecuación no homogénea es un espacio afín asociado al espacio vectorial de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea.

bastará encontrar una solución particular, dado que ya sabemos resolver la ecuación homogénea asociada. Habrá casos en los que esa solución particular podrá determinarse por simple inspección; por ejemplo, es bien evidente que la función $x(t) = t$ es solución de la ecuación

$$x' = x - t + 1$$

con lo que la solución general de ésta será:

$$x(t) = Ke^t + t$$

Pero un camino así no ofrece muchas perspectivas en cuanto se complique mínimamente la ecuación. Afortunadamente, y un tanto sorprendentemente, existe un método completamente general para determinar una solución particular de la ecuación (1), el llamado *método de variación de las constantes.* La idea consiste en suponer en la expresión que da la solución general de la ecuación homogénea,

$$x(t) = K \exp\left(\int^t a(s)ds\right)$$

que K es función de t (de ahí lo de «variación de las constantes»). En otras palabras, se conjetura que hay una solución de la ecuación (1) de la forma

$$x_p(t) = K(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) \tag{10}$$

con $K(t)$ una función a determinar, lo que se intenta «imponiendo» que la función $x_p(t)$ dada por (10) sea efectivamente solución de (1). Veamos:

$$x_p'(t) = K'(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) + K(t)a(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right)$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$x_p'(t) = K'(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) + K(t)a(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) =$$

$$= a(t)K(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) + b(t)$$

o sea,

$$K'(t) \exp\left(\int^t a(s)ds\right) = b(t)$$

es decir,

$$K'(t) = b(t)\exp\left(-\int^t a(s)ds\right)$$

ecuación diferencial en $K(t)$ que se reduce, de hecho, a un problema de cálculo de primitivas:

$$K(t) = \int^t b(s)\exp\left(-\int^s a(u)du\right)ds$$

(Se obtiene toda una familia uniparamétrica de funciones $K(t)$; nosotros necesitamos sólo una.) Hay, pues, solución positiva a la conjetura y la función

$$x_p(t) = \left[\int^t b(s)\exp\left(-\int^s a(u)du\right)ds\right]\left[\exp\left(\int^t a(s)ds\right)\right] \tag{11}$$

es solución de la ecuación (1), pues es claro que el camino que lleva a la expresión (11) es reversible, es decir, que esa función $x_p(t)$ verifica la ecuación diferencial (1).

Con mucha mayor razón que antes, no es en absoluto recomendable memorizar la fórmula (11) con vistas a resolver ecuaciones concretas. Resulta mucho más práctico reproducir en cada caso el método de variación de las constantes tal cual se ha expuesto para la ecuación general (1).

En cuanto al problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} Lx = b(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad \text{con } t_0 \in (\alpha, \omega),\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ dados} \end{cases} \tag{12}$$

nótese que si fijamos las primitivas que aparecen en los cálculos anteriores tomando como límite inferior de integración t_0, entonces la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = K\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

teniéndose $x_h(t_0) = K$.

La solución particular de la completa dada por (11) satisface

$$x_p(t_0) = \left[\left(\int_{t_0}^t b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^s a(u)du\right)ds\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)\right] = 0 \cdot 1 = 0$$

Así pues, la función

$$x(t) = \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\right]\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(u)du\right)ds\right] \tag{13}$$

es solución del problema (12).

La unicidad de solución puede establecerse directamente a partir de la unicidad para la ecuación homogénea. En efecto, si $v_1(t)$, $v_2(t)$ satisfacen

$$\begin{cases} Lv_1 = b(t) \\ v_1(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} Lv_2 = b(t) \\ v_2(t_0) = x_0 \end{cases}$$

entonces la función $v_1(t) - v_2(t)$ verifica

$$\begin{cases} L(v_1 - v_2) = 0 \\ (v_1 - v_2)(t_0) = 0 \end{cases}$$

pero la solución *única* del problema

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

es la función $x(t) \equiv 0$, por la fórmula (5), con lo que $v_1(t) - v_2(t) \equiv 0$, es decir, $v_1(t) \equiv v_2(t)$. Hemos probado, por tanto, el siguiente teorema.

Teorema 1 (de existencia y unicidad del PVI). *Sean $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones continuas en un intervalo (α, ω) de $\mathbb{R}$. Entonces, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \quad , \quad t \in (\alpha, \omega) \\ x(t_0) = x_0 \quad , \quad t_0 \in (\alpha, \omega) \quad , \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ dados} \end{cases}$$

tiene una solución única, dada por la expresión (13).

Geométricamente, este teorema implica que las gráficas de las soluciones de $x' = a(t)x + b(t)$ llenan completamente la franja vertical del plano (t, x) determinada por el intervalo (α, ω), como una especie de fibrado en el que nunca se cortan dos gráficas (Fig. 1).

EJEMPLO 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$x' = 2tx + t^3$$

Aquí, $a(t) = 2t$ y $b(t) = t^3$ son funciones definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = Ke^{t^2} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

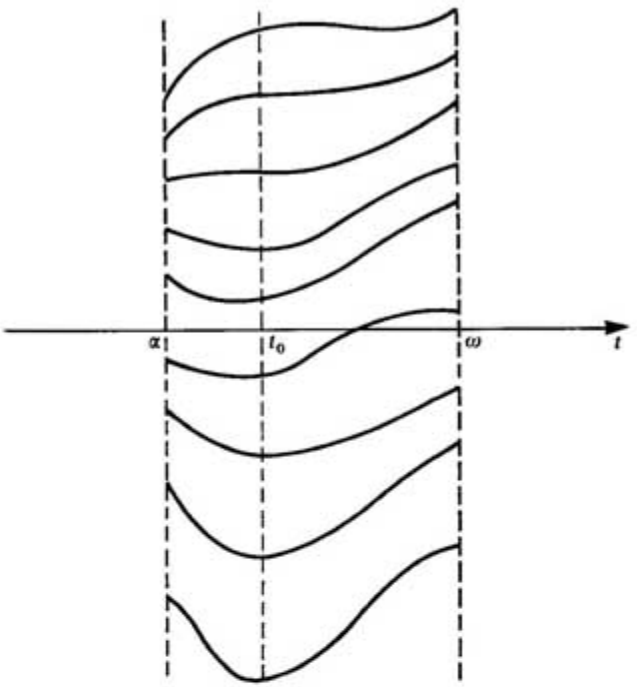


Figura 1

Buscamos una solución particular de la completa de la forma

$$x_p(t) = K(t)e^{t^2}$$

Derivando, $x_p'(t) = K'e^{t^2} + 2tKe^{t^2}$, y sustituyendo en la ecuación, ha de ser

$$K(t) = \int^t e^{-s^2}s^3 ds$$

que integrada por partes da

$$K(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2 + 1)$$

Por tanto, una solución particular de la completa es:

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 1)$$

y la solución general vendrá dada por:

$$x(t) = K(t)e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2 + 1) \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO 2. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} x' + \dfrac{x}{t} = \cos t \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$$

Aquí, $a(t)$ no está definida en $t = 0$, por lo que $(\alpha, \omega) = (0, \infty)$ (la ecuación también se puede plantear en $(-\infty, 0)$, pero el «instante inicial» que se da es $t_0 = \pi \in (0, \infty)$. El cálculo de la solución general que sigue es igualmente válido en el intervalo $(-\infty, 0)$).

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = \frac{K}{t} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Buscamos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \frac{K(t)}{t}$$

Sustituyendo en la ecuación completa, vemos que ha de ser

$$\frac{K'(t)}{t} = \cos t$$

es decir,

$$K(t) = \int^t s \cos s \, ds$$

Integrando por partes se obtiene

$$K(t) = t \operatorname{sen} t + \cos t$$

con lo que

$$x_p(t) = \operatorname{sen} t + \frac{\cos t}{t}$$

y la solución general será

$$x(t) = \frac{K}{t} + \operatorname{sen} t + \frac{\cos t}{t} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Imponiendo la condición inicial, resulta

$$K = \pi + 1$$

con lo que la solución pedida es

$$x(t) = \frac{(\pi + 1)}{t} + \operatorname{sen} t + \frac{\cos t}{t}$$

EJEMPLO 3. *La ecuación de Bernoulli.*

La *ecuación de Bernoulli*[3] tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n \tag{14}$$

donde n es un número real. Si $n = 0$ ó 1, se trata de una ecuación lineal que ya sabemos resolver. Para cualquier otro valor de n, la ecuación es no lineal y vamos a ver cómo mediante el cambio de variable $v = x^{1-n}$ se reduce a una ecuación lineal (obsérvese que si $n = 2$, $a(t) \equiv a > 0$, constante, y $b(t) \equiv -b$, $b > 0$ constante, se trata de la ecuación logística que considerábamos en la introducción; obteníamos su solución general gracias, precisamente, a ese cambio de variable).

Se tiene, en efecto, que

$$\frac{dv}{dt} = (1 - n)x^{-n}\frac{dx}{dt} \tag{15}$$

de donde, si dividimos la ecuación (14) por x^n (suponemos que $x \neq 0$), vemos fácilmente que si $x(t)$ satisface (14), entonces $v(t)$ ha de satisfacer

$$\frac{dv}{dt} = (1 - n)a(t)v + (1 - n)b(t) \tag{16}$$

ecuación lineal cuya solución general sabemos hallar; se deshace después el cambio de variable, $x(t) = [v(t)]^{1/(1-n)}$, y, si $n > 0$, añadimos, para tener la solución general de (14), la función $x(t) \equiv 0$, que habíamos «perdido» en el cambio de variable (véase también la expresión (15) que da la derivada) y que se comprueba directamente que es solución de (14). Si $n < 0$, no hay lugar a ello, porque ya la propia ecuación diferencial no estaba definida en $x = 0$. Resolvamos, por ejemplo, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t} + x^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

La ecuación es una ecuación de Bernoulli con $n = 3$. Hacemos el cambio

$$v = x^{1-3} = x^{-2}$$

---

[3] Por Jacob Bernoulli, quien la propuso en 1695. El método para resolverla que sigue lo expuso Leibniz en 1696.

y vemos que la ecuación en $v(t)$ es

$$v' = -\frac{2}{t}v - 2$$

La solución general de la homogénea es

$$v_h(t) = \frac{K}{t^2} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Es razonable conjeturar, por la forma de la ecuación, que tiene que haber una solución particular de la completa de la forma $v_p(t) = Ct$, con C constante. Se prueba:

$$C = -\frac{2}{t}(Ct) - 2$$

y ello nos lleva a un problema simple de «coeficientes indeterminados»[4]:

$$C = -2C - 2$$

que da el valor $C = -2/3$. Así pues, la solución general de la ecuación en v es

$$v(t) = \frac{K}{t^2} - \frac{2t}{3} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, $x = v^{-1/2}$, se tendrá:

$$x(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{k/t^2 - 2t/3}} \quad , \quad (t \neq 0)$$

para la solución general de la ecuación en $x(t)$, junto con la solución $x(t) \equiv 0$. Obsérvese cómo, debido al doble signo de la raíz, hay una familia doblemente paramétrica de soluciones. La situación en las ecuaciones no lineales no es tan clara y simple en lo que se refiere a la noción de solución general como lo es en las ecuaciones lineales. Ello no obsta para que el problema de valor inicial propuesto tenga solución única (está en las hipótesis del teorema general de existencia y unicidad que veremos): como la condición inicial es $x(1) = 1 > 0$, la solución correspondiente provendrá del signo + de la raíz, y, entonces:

$$1 = + \sqrt{\frac{1}{K - 2/3}}$$

[4] Veremos más adelante que esta idea se puede aplicar a cierta clase amplia de ecuaciones diferenciales. Aunque no se tiene la generalidad del método de variación de las constantes, conlleva, cuando es aplicable, cálculos mucho más sencillos.

es decir, $K = 5/3$ y la solución pedida será:

$$x(t) = t\sqrt{\frac{3}{5 - 2t^3}}$$

Nótese que la solución está definida sólo en el intervalo abierto $(0, \sqrt[3]{5/2})$. También en esto la situación es muy distinta a la de las ecuaciones lineales. En éstas, si los *datos* de la ecuación, o sea, las funciones $a(t)$ y $b(t)$, están definidos y son continuos en un intervalo (α, ω), automáticamente *todas* las soluciones de la ecuación están también definidas en ese mismo intervalo (α, ω). En la ecuación que nos ocupa,

$$x' = \frac{x}{t} + x^3$$

la función del segundo miembro está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (en esto, como en las ecuaciones lineales) y para todo $t > 0$ (también para $t < 0$, pero consideramos sólo $t > 0$ al ser $t_0 = 1 > 0$) y es continua y derivable en ese conjunto del plano (t, x). Sin embargo, el intervalo de definición de las soluciones es finito y *distinto* para cada solución (según se ve en la expresión que da la solución general dependiendo de K).

1.2. Modelos lineales

Ya hemos visto en la introducción modelos lineales como el del crecimiento exponencial de poblaciones o el de la desintegración de una sustancia radiactiva. En ocasiones, un modelo lineal, fruto de las hipótesis más simples de «funcionamiento» de un sistema físico, describe con gran precisión la realidad a la que se aplica (como ocurre en el caso de la desintegración radiactiva). En otros casos, el modelo lineal surge como aproximación a un modelo no lineal más realista, pero también más difícil de tratar matemáticamente. El argumento que lleva a esa aproximación procede como sigue. Supongamos que un determinado proceso está modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

Aun no conociendo la forma concreta de $f(x)$, sabemos que, suponiendo para ella un mínimo de regularidad, podemos escribir

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \cdots$$

de acuerdo con el desarrollo de Taylor.

Para x próximo a $\bar{x}$,

$$f(x) \simeq ax + b$$

con

$$a = f'(\bar{x}) \quad , \quad b = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\bar{x}$$

y cabe esperar que para valores de la variable dependiente $x(t)$ próximos a $\bar{x}$, las soluciones de

$$\frac{dx}{dt} = ax + b \tag{2}$$

describan con suficiente aproximación la evolución del proceso bajo estudio (por ejemplo, es muy frecuente que eso se plantee en las proximidades de una solución constante $x(t) \equiv \bar{x}$ de la ecuación (1), en cuyo caso $f(\bar{x}) = 0$). La ecuación (2) es una ecuación lineal con coeficientes constantes fácil de resolver.

Más generalmente, si la ecuación de partida es

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3}$$

también bajo hipótesis apropiadas de regularidad sobre $f(t, x)$ se tendrá:

$$f(t, x) = f(t, \bar{x}) + f_x(t, \bar{x})(x - \bar{x}) + \cdots$$

para un cierto rango de valores de t, y la ecuación diferencial aproximada, para valores de $x(t)$ cercanos a $\bar{x}$, tendrá la forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{4}$$

es decir, la de una ecuación lineal general (en lugar de $\bar{x}$ se podría incluso considerar una solución concreta $\bar{x}(t)$ de (3) con vistas a estudiar el comportamiento de las soluciones próximas a ella).

Veamos a continuación diversas situaciones en las que se aplican las ecuaciones diferenciales lineales. Los contextos serán muy diferentes y sin embargo el modelo matemático será el mismo.

A) Interés compuesto

Si se invierte un capital de C_0 pesetas a una tasa de interés del r por uno anual, al final del primer año se tendrán

$$C_1 = C_0 + rC_0 = (1 + r)C_0$$

pesetas, y, en general, componiendo anualmente, se tendrá la relación

$$C_{k+1} = (1 + r)C_k \tag{5}$$

entre el capital al final del año $(k + 1)$ y el capital al final del año anterior. La relación (5) es una *ecuación en diferencias* (ya mencionada en la introducción) fácil de resolver; se tendrá:

$$C_k = C_0(1 + r)^k \tag{6}$$

Si el interés se compone semestralmente, al final de los primeros seis meses el capital inicial C_0 se habrá convertido en

$$C_1 = C_0 + \frac{r}{2}C_0 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C_0$$

y la nueva ecuación en diferencias será:

$$C_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{2}\right)C_k \tag{7}$$

indicando k el número de semestres transcurridos. Si se compone diariamente, la ecuación será:

$$C_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{365}\right)C_k \tag{8}$$

y, en general, si se compone n veces al año se tendrá

$$C_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)C_k \tag{9}$$

La solución de (9) es

$$C_k = C_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^k \tag{10}$$

siendo k el número de «pasos temporales» (de duración $1/n$ años) transcurridos. Al cabo de t años el capital obtenido de acuerdo con la fórmula (10) será de

$$C(t) = C_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{11}$$

pesetas.

En el caso límite, el interés se compone *continuamente* —a cada instante— a lo largo del año, es decir, haciendo «tender n a infinito»; la ecuación en diferencias deja de tener validez y el capital obtenido al cabo de t años mediante este proceso abstracto toma sentido por dos vías equivalentes. Por un lado, parece razonable calcular dicho capital como el *límite* cuando $n \to \infty$ de la expresión (11):

$$C_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \xrightarrow[n \to \infty]{} C_0 e^{rt} \tag{12}$$

(Esto da, considerando $C_0 = r = t = 1$, un camino bien conocido para ilustrar la introducción del número *e*.)

Pero también podemos plantear el paso de lo discreto a lo continuo directamente en la ecuación en diferencias (9). Haciendo $1/n = \Delta t$ (el «paso temporal»), (9) toma la forma

$$\frac{C_{k+1} - C_k}{\Delta t} = rC_k \tag{13}$$

que, cuando $\Delta t \to 0$ ($n \to \infty$), da la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = rC \tag{14}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$C(t) = C_0 e^{rt} \tag{15}$$

Se tiene, pues, el mismo resultado que (12). Como se ve, es el mismo argumento que utilizábamos en la introducción a propósito de la dinámica de poblaciones. En este caso del interés compuesto, la ley lineal (14) no pretende describir una realidad sino que la «impone» (concretamente, al ciudadano por parte de bancos y autoridad monetaria).

B) Ley de Newton de variación de la temperatura

Denotemos por $T(t)$ la temperatura en el instante t de un objeto que no posea fuentes ni sumideros internos de calor, y sea T_e la temperatura del medio que lo rodea. Si el objeto está a una temperatura mucho más alta que T_e (por ejemplo, una bebida caliente en una habitación), es claro que se enfriará rápidamente, acercándose $T(t)$ a T_e. El enfriamiento será cada vez más lento al irse aproximando $T(t)$ a T_e. Del mismo modo, si el objeto está a una temperatura mucho más baja que T_e (por ejemplo, una bebida muy fria en una habitación), se irá calentando al irse aproximando $T(t)$ a T_e. La cuantificación más simple de las observaciones anteriores consiste en suponer que la variación instantánea $T'(t)$ de la temperatura del objeto es proporcional a la diferencia $(T(t) - T_e)$, con constante de proporcionalidad negativa, es decir:

$$T' = -k(T - T_e) \quad , \quad k > 0 \tag{16}$$

Ésta es la *ley de Newton* de variación de la temperatura (se ha hecho también la hipótesis de que el objeto es muy pequeño frente al medio, con lo que la *cantidad de calor* que contiene es pequeña y, aunque pase calor al medio, éste permanecerá en la práctica a temperatura constante, T_e, a lo largo del proceso).

La ecuación (16) es una ecuación lineal no homogénea. Es inmediato ver que sus soluciones están dadas por

$$T(t) = T_e + (T(0) - T_e)e^{-kt} \tag{17}$$

Obsérvese que $\lim_{t \to \infty} T(t) = T_e$, cualquiera que sea la temperatura inicial del objeto (Fig. 2).

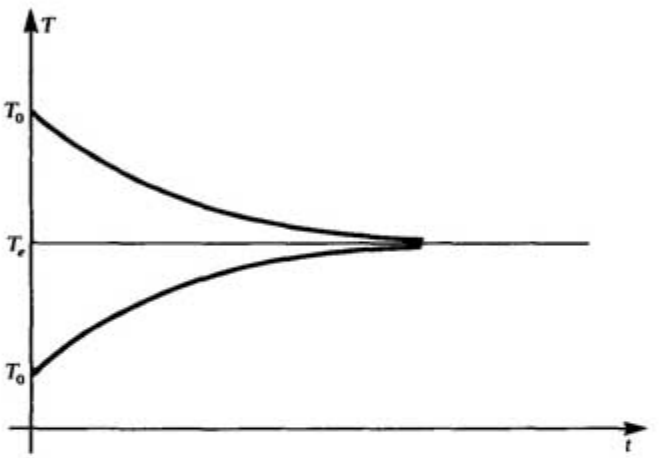


Figura 2

C) Ley de Fick de la difusión

La ley de Fick establece que la velocidad a la que un soluto se difunde a través de una membrana delgada, perpendicularmente a ésta, es proporcional al área de la membrana y a la diferencia entre las concentraciones del soluto en ambos lados de la membrana. Si el área de la membrana permanece constante y la concentración del soluto en un lado de la membrana se mantiene en un valor (aproximadamente) fijo C_e, entonces la ley de Fick toma la forma

$$C'(t) = -k(C(t) - C_e) \quad , \quad k > 0 \tag{18}$$

siendo $C(t)$ la concentración en el otro lado de la membrana. Podemos imaginar, por ejemplo, una célula inmersa en un medio líquido que contiene un soluto a una concentración C_e; se supone que la célula es muy pequeña respecto al medio, y así, en el intercambio de moléculas de soluto a través de la membrana de la célula, se puede suponer que la concentración de soluto en el medio permanece en el valor

constante C_e. Los mismos argumentos de antes, aplicados ahora a la difusión del soluto, en lugar de a la difusión del calor, conducen a la ecuación (18) que, como se ve, es la misma que la ecuación (16).

D) Mecánica

Supongamos que se deja caer, bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m en un medio (en particular, el aire) que se opone al movimiento ejerciendo una fuerza de resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. El movimiento tiene lugar en las proximidades de la superficie terrestre, y podemos suponer que la gravedad es constante y que aquél es rectilíneo a lo largo de un eje x cuyo origen está en la posición inicial de la partícula y cuyo sentido positivo apunta hacia abajo (Fig. 3).

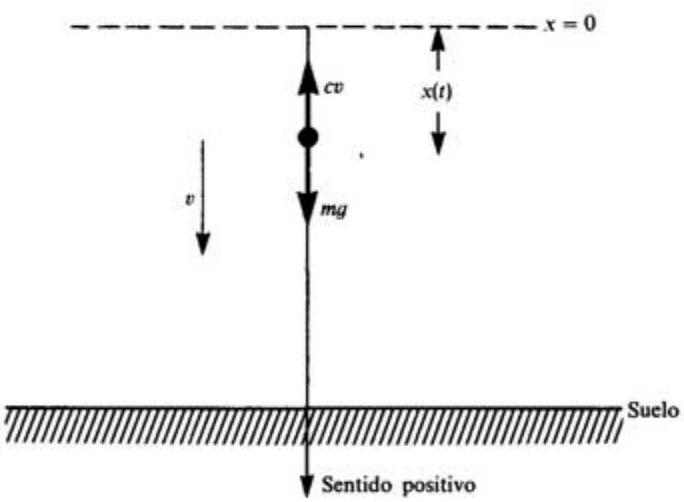


Figura 3

La segunda ley de Newton (véase (30) de la introducción) toma, en estas circunstancias, la forma:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \tag{19}$$

siendo $v = dx/dt$ la velocidad, y c una constante positiva. Si bien dicha ley conduce, en general, a una ecuación diferencial de segundo orden, en este caso se traduce en una ecuación lineal de primer orden fácilmente resoluble (véanse (16) y (18)).

Las soluciones de (19) están dadas por:

$$v(t) = \frac{mg}{c} + \left(v(0) - \frac{mg}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t} \tag{20}$$

siendo $v(0)$ la velocidad inicial que se comunica a la partícula. Obsérvese que

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{c}$$

cualquiera que sea la velocidad inicial. Puesto que $v(t) = dx/dt$, podemos obtener de (20) la posición de la partícula en cada instante:

$$x(t) = \frac{mg}{c}t - \frac{m}{c}\left(v(0) - \frac{mg}{c}\right)e^{-\frac{c}{m}t} + K$$

determinándose K por la condición impuesta de que $x(0) = 0$. Resulta entonces:

$$x(t) = \frac{mg}{c}t - \frac{m}{c}\left(v(0) - \frac{mg}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{21}$$

Aunque $x(t)$, dada por (21), está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, fisicamente no puede, claro está, superar la distancia existente entre la posición inicial y la superficie terrestre. Obsérvese que (21) es la solución de la ecuación lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = mg - c\frac{dx}{dt}$$

correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $v(0)$.

E) Circuitos eléctricos

Un circuito eléctrico es un trayecto formado por conductores por el que circula una *corriente eléctrica;* ésta consiste en un movimiento o flujo de *cargas eléctricas* impulsadas por una *fuerza electromotriz* (*f.e.m.*), que es la energía por unidad de carga que se suministra al sistema mediante, por ejemplo, una batería (la energía se obtiene a partir de ciertas reacciones químicas) o un generador (que implica determinados mecanismos giratorios); la unidad de medida es el *voltio* (nótese que la f.e.m. no es, en realidad, una fuerza). Aparte de la carga eléctrica y la fuerza electromotriz, hay otras dos magnitudes fundamentales en el estudio de las corrientes eléctricas: la *diferencia de potencial, V,* entre dos puntos de un circuito, que es la cantidad de energía o trabajo necesario para transportar la unidad de carga eléctrica positiva de un punto a otro (véase apartado 4.5, donde se comenta la noción de energía potencial); su

unidad de medida es el *voltio*. La *intensidad*, I, es la medida de la cantidad de carga que pasa por un punto del circuito por unidad de tiempo; mide, pues, la «intensidad» del flujo de cargas eléctricas; la unidad de medida es el *amperio*.

Aquí vamos a considerar circuitos simples que constan de los siguientes elementos (Fig. 4):

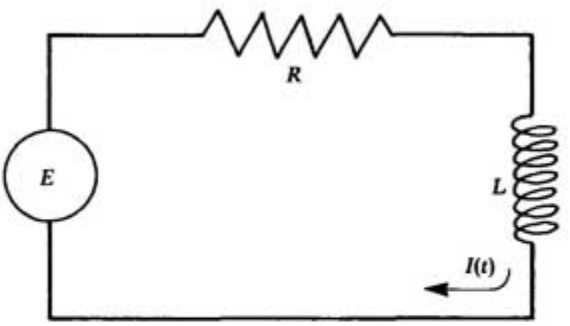


Figura 4

a) Una fuente de fuerza electromotriz $E(t)$ (una batería o un generador, por ejemplo; $E(t)$ puede ser constante, caso de una batería, o variable en el tiempo).

b) Una *resistencia* que se opone a la corriente eléctrica, lo que produce una caída de potencial (hay una pérdida de energía eléctrica en forma de calor). La *ley de Ohm* establece que la diferencia de potencial que se produce es proporcional a la intensidad de la corriente a través de la resistencia:

$$V_R = RI \tag{22}$$

La constante de proporcionalidad, R, da la medida, en *ohmios*, de la resistencia (nótese que es una *ley lineal;* en situaciones más complejas, la relación entre V e I puede ser no lineal y se llegará a ecuaciones diferenciales no lineales; para los metales, la ley (22) se cumple con bastante exactitud para un rango amplio de valores de I).

c) Una *autoinducción*, consistente normalmente en un hilo conductor arrollado en espiral, que da lugar a una *inductancia*, propiedad que se opone a cualquier cambio de la corriente existente en el circuito, produciéndose una caída de voltaje dada por

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \quad (Ley\ de\ Faraday) \tag{23}$$

La constante positiva L da la medida, en *henrios*, de la inductancia (se trata de otra ley lineal).

(Más adelante, en el apartado 4.5, introduciremos otro elemento más, el *condensador*.)

La corriente eléctrica existente en el circuito está gobernada por las *leyes de Kirchhoff*:

I. La suma de las intensidades de corriente que se dirigen hacia cualquier punto de unión de elementos del circuito es igual a la suma de las que se alejan de él (se supone que el circuito esta *orientado*, o sea, que se ha asignado un sentido de recorrido positivo (Fig. 3).

II. Alrededor de todo circuito cerrado orientado, la suma de fuerzas electromotrices es igual a la suma de caídas de voltaje que se producen en él.

En nuestro caso, tenemos, por tanto, que

$$V_L + V_R = E$$

Es decir,

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E \tag{24}$$

o sea, una ecuación diferencial lineal de primer orden. Si E es constante, proporcionada, por ejemplo, por una batería, las soluciones de (24) están dadas por

$$I(t) = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{25}$$

donde $I_0 = I(0)$. Cada solución, descripción de un cierto flujo de corriente, consta de dos términos: un *estado estable* (o *estacionario*), E/R, y un término *transitorio* cuyo efecto decrece exponencialmente con el tiempo. Para valores grandes de t, el circuito se comporta como uno en el que no hubiese autoinducción, al intervenir L sólo en el término transitorio, y se verifica aproximadamente la ley de Ohm: $E = IR$.

Si remplazamos la batería por una fuente de corriente *alterna* dada por $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, las soluciones están dadas por

$$I(t) = \frac{E_0}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + \left(I_0 - \frac{\omega E_0 L}{Z^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{26}$$

donde α y Z están definidas por:

$$R = Z\cos\alpha \quad , \quad \omega L = Z\operatorname{sen}\alpha$$

(Verifíquese como ejercicio.)

Hay también, en este caso, un término de estado estable y un término transitorio que converge exponencialmente a 0 cuando $t \to \infty$. El estado estable es sinusoidal, con la misma frecuencia que el voltaje que se aplica y con un desfase dado por α respecto a éste (α se denomina *ángulo de fase*). La *amplitud* de este estado es E_0/Z, recibiendo $Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$ el nombre de *impedancia* del estado estacionario del circuito; Z juega el papel que R jugaba en un circuito al que se suministraba un voltaje constante.

F) Economía

Vamos a considerar un modelo muy simple de *equilibrio parcial de mercado*. Se trata de determinar el precio en un mercado aislado, relativo a un solo bien o mercancía. Sólo son necesarias, entonces, tres variables en el modelo: la cantidad demandada, Q_d, de dicho bien, la cantidad ofrecida, Q_s, y su precio, P.

Las hipótesis más simples en cuanto al *comportamiento* de mercado consisten en suponer que Q_d es una función *lineal decreciente* del precio P, y que Q_s es una función *lineal creciente* de P, con las características que refleja la figura 5.

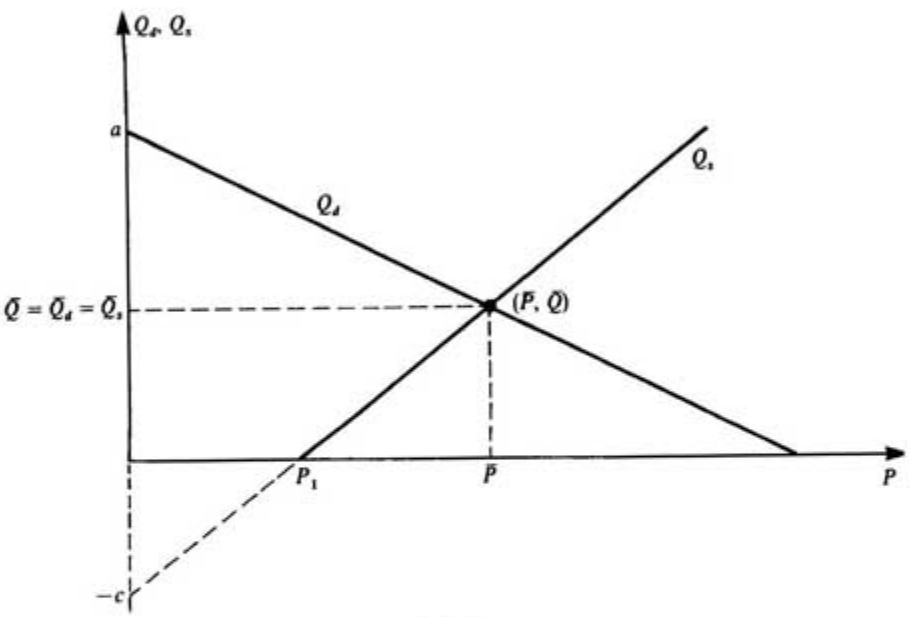


Figura 5

Así pues, se supone que

$$\begin{cases} Q_d = a - bP & ; \quad a,\ b > 0 \\ Q_s = -c + dP & ; \quad c,\ d > 0 \end{cases} \tag{27}$$

(No hay oferta si no se alcanza un precio mínimo $P_1 = c/d$; por su parte, a representa la demanda que habría si el bien fuese gratuito y a/b el precio para el que la demanda sería nula.)

Para completar el modelo, hay que especificar una *condición de equilibrio*. En un análisis *estático*, la hipótesis usual es que se alcanza el equilibrio en el mercado si, y sólo si, la *demanda excedente* es cero:

$$Q_d - Q_s = 0 \tag{28}$$

o sea, si la cantidad ofrecida iguala a la demandada y el mercado está «vacío» del

bien considerado. Bajo estas hipótesis, la determinación del *estado de equilibrio*, $(\bar{P}, \bar{Q})$, del mercado es inmediata, teniéndose

$$\bar{P} = \frac{a + c}{b + d} \tag{29}$$

Consideremos ahora el modelo desde un punto de vista *dinámico*, con el precio $P = P(t)$ evolucionando a lo largo del tiempo. Si $P(0) = \bar{P}$, dado por (29), no sería necesario un análisis dinámico; pero si $P(0) \neq \bar{P}$, se plantea la cuestión de si $\bar{P}$ será alcanzable a través de un proceso de ajuste en el que tanto el precio P como Q_d y Q_s, que son funciones de P según (27), varían con el tiempo. Para responder a esto será necesario proponer una hipótesis sobre el modo en que P varía con el tiempo. Parece razonable suponer que la variación instantánea de P respecto al tiempo sea directamente proporcional a la demanda excedente $Q_d - Q_s$, es decir,

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_d - Q_s) \quad , \quad k > 0 \tag{30}$$

La relación (30), junto con (27), da para $P(t)$ la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dP}{dt} = -k(b + d)P + k(a + c) \tag{31}$$

Obsérvese que

$$P(t) \equiv \bar{P} = \frac{a + c}{b + d}$$

es la única solución «estacionaria» (o sea, constante) de la ecuación (31). Las soluciones de ésta están dadas por

$$P(t) = \frac{a + c}{b + d} + \left[P(0) - \frac{a + c}{b + d}\right] e^{-k(b+d)t} \tag{32}$$

Vemos cómo

$$P(t) \to \bar{P} = \frac{a + c}{b + d}$$

cuando $t \to \infty$, cualquiera que sea el precio inicial $P(0)$. Es decir, bajo las hipótesis realizadas, efectivamente se llegará, a la larga, al precio de equilibrio $\bar{P}$ (se dice que el estado de equilibrio es *dinámicamente estable*; $\bar{P}$ es, en el contexto de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, una solución estacionaria *asintóticamente estable*. Gandolfo [4] y Chiang [2] son dos buenas referencias para las aplicaciones tradicionales a la Economía de las ecuaciones diferenciales ordinarias).

PROBLEMAS

1. Hallar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial, indicando su intervalo de definición.

a) $\begin{cases} x' + 5x = t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x' = (\operatorname{tg} t)x + \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' + 2tx = t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} tx' + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^3}}x = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases}$

2. La *ecuación de Riccati* tiene la forma

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t) \qquad (*)$$

Probar que si se conoce una solución particular $x_1(t)$, entonces el cambio de variable dado por

$$x = x_1(t) + \frac{1}{v}$$

donde v es la nueva variable dependiente, reduce la ecuación (*) a una ecuación lineal.

Aplicar lo anterior para resolver las ecuaciones

a) $$x' = \frac{t+1}{2t^2}x^2 + \frac{1}{2t}x - \frac{t}{2}$$

(solución particular: $x_1(t) = t$)

b) $$x' = x^2 - e^t x + e^t$$

(solución particular: $x_1(t) = e^t$)

c) $$x' = x^2 - 2x + 1$$

[*Indicación*: Obsérvese que si los coeficientes de la ecuación (*) son constantes, una función constante $x(t) \equiv k$ es solución de (*) si, y sólo si, k es solución de la ecuación de segundo grado: $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$.]

3. Se sabe que la población de una ciudad crece a tasa constante. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

4. La *semivida* de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una cantidad inicial de aquélla en reducirse a la mitad (la desintegración de una sustancia radiactiva está regida por la ecuación $C' = -\lambda C$, $\lambda > 0$, según veíamos en la introducción).

a) Probar que la semivida no depende de la cantidad inicial considerada y que está dada por

$$T = \frac{(\ln 2)}{\lambda} \qquad (*)$$

donde λ es la constante de desintegración.

b) Una sustancia radiactiva mantiene al cabo de 50 horas el 95 por 100 de su masa inicial. Determinar su semivida (así se procede experimentalmente para determinar la semivida o, equivalentemente, la constante de desintegración, de acuerdo con (*), de una sustancia radiactiva).

5. *(Estimación de edades de restos arqueológicos).* El isótopo radiactivo natural del carbono es el carbono-14, cuya semivida es de aproximadamente 5.730 años. Se acepta que la razón entre carbono-14 y carbono-12 (el isótopo estable del carbono) del CO_2 atmosférico ha permanecido constante a lo largo de, al menos, los últimos 50.000 años. Esa misma razón existirá en los organismos vivos al ser incorporado CO_2 por las plantas mediante la fotosíntesis y, a partir de ellas, por todos los animales de la cadena alimenticia. Cuando muere una planta o un animal, la cantidad de C_{14} decrece debido a la desintegración radiactiva, mientras que la cantidad de C_{12}, estable, permanece constante. Midiendo la radiactividad de un resto arqueológico de origen orgánico (madera, huesos, etc.), podrá determinarse la edad aproximada de dicho resto (el procedimiento fue desarrollado por el químico norteamericano Willard F. Libby).

Si la radiactividad de unos restos arqueológicos es el 25 por 100 de la radiactividad de una muestra viva, determínese la edad de los restos.

6. Un objeto de masa m se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Se supone que el aire opone una resistencia proporcional a la velocidad y, a diferencia del punto D del apartado 1.2, que el sentido positivo del eje x apunta hacia arriba y que $x = 0$ está en el suelo. Con estas premisas, se trata de:

a) Establecer la ecuación diferencial que rige el movimiento del objeto.

b) Determinar la expresión de la velocidad a lo largo del tiempo.

c) Calcular el tiempo que el objeto tarda en alcanzar la altura máxima, así como el valor de ésta.

7. *(Flujos en recipientes).* Denotemos por $Q(t)$ la cantidad de sal que contiene, en el instante t, un recipiente R con agua salada. Desde un depósito superior, se vierte a R agua salada con una concentración constante de C kg de sal por litro, a razón de r_0 litros por unidad de tiempo. Simultáneamente, y mientras se remueve

continuamente el depósito R para obtener una mezcla uniforme, la solución resultante de la mezcla sale de R a razón de r litros por unidad de tiempo. Se trata de establecer la ecuación diferencial que satisface $Q(t)$ (Fig. 6).

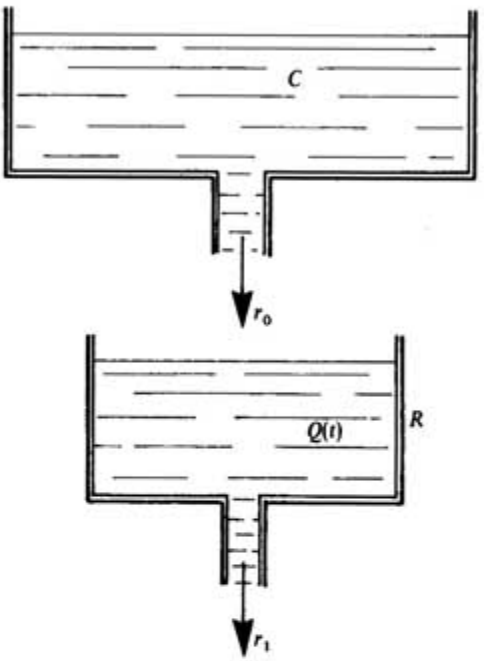


Figura 6

2 Sistemas de ecuaciones lineales: teoría general

En este capítulo se desarrollan los conceptos y resultados fundamentales relativos a los sistemas de ecuaciones lineales generales.

Una primera lectura puede limitarse al apartado 2.1, en el que se formula el problema de valor inicial propio de dichos sistemas, se enuncia el correspondiente teorema de existencia y unicidad de solución, bosquejando su demostración, y se comentan algunos resultados simples, pero importantes, relativos a los sistemas homogéneos y a los no homogéneos.

2.1. El problema de valor inicial. Estructura del conjunto de soluciones

Según indicábamos en la introducción, un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \end{cases}$$

En este apartado vamos a comenzar el estudio de los *sistemas lineales*, que son aquellos en los que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son todas ellas lineales en las variables dependientes $x_1, \ldots, x_n$. Su forma general será, pues:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

Se supone que las funciones $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, ..., n)$ y $b_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$ están definidas y son continuas en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Para obtener una representación más concisa, en lenguaje vectorial, del sistema (1), podemos introducir la *función matricial*

$$t \longmapsto A(t)$$

donde $A(t)$ es, para cada t del intervalo (α, ω) en que están definidas las funciones $a_{ij}(t)$, la matriz $n \times n$ $(a_{ij}(t))$. Para estas funciones matriciales se aplica lo dicho en la introducción sobre continuidad, derivadas e integrales de funciones vectoriales, pues no son otra cosa, en definitiva, que funciones vectoriales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{n^2}$.

Así, si $A(t) = (a_{ij}(t))$, la derivada de $A(t)$ es la función matricial

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right)$$

y la integral de $A(t)$ sobre el intervalo $[t_1, t_2]$ es la matriz

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t)dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(t)dt\right)$$

Con estas notaciones, el sistema (1) se puede escribir en la forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \tag{1'}$$

donde

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

y $A(t)x$ significa, como es usual, la aplicación de la matriz $A(t)$ al vector x (véase apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor).

Si las funciones $b_1(t), ..., b_n(t)$ son todas idénticamente nulas, se dice que el sistema (1) es *homogéneo*. Si, en particular, las funciones $a_{ij}(t)$ son todas ellas constantes, se tendrá un *sistema lineal de coeficientes constantes*

$$x' = Ax + b(t), \quad A = (a_{ij})$$

Estos últimos sistemas representan la contrapartida de las ecuaciones

$$x' = ax + b(t)$$

y constituyen la única clase de sistemas para los que se puede desarrollar un método

general para encontrar explícitamente las soluciones, como veremos a partir del capítulo siguiente.

El *problema de valor inicial* (PVI) asociado al sistema (1) consiste en hallar la función (vectorial) $x(t)$ derivable en (α, ω) que satisfaga

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \quad ; \quad t_0 \in (\alpha, \omega),\ x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados} \end{cases} \tag{2}$$

Puesto que cualquier solución $x(t)$ de (1) es solución de un determinado problema de valor inicial de la forma (2), y viceversa, la cuestión de la existencia de soluciones del sistema (1) se abordará bajo el planteamiento de un problema de valor inicial de la forma (2), teniendo en cuenta la importancia de este planteamiento en las aplicaciones, según comentábamos en la introducción.

En general, no será posible encontrar explícitamente las soluciones de (2), a diferencia de lo que ocurre para las ecuaciones escalares, salvo, como se ha señalado, para los sistemas lineales con coeficientes constantes (véase el problema 11 del capítulo 5). Pero lo que sí es posible, de una manera general, es demostrar la *existencia* y *unicidad* de solución para el problema (2), aunque esa demostración no permita, por sí misma, «exhibir» una fórmula explícita que dé la solución.

En este apartado describiremos el proceso que lleva a ese resultado, dejando la demostración formal para el apartado 2.2.

Si $x(t)$ es solución de (2) en el intervalo (α, ω), entonces:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$. Integrando esta expresión entre t_0 y t, $t_0, t \in (\alpha, \omega)$, y teniendo en cuenta la condición inicial resultará:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds \tag{3}$$

Y, recíprocamente, toda función $x(t)$ que satisfaga la ecuación (3) en (α, ω) es solución del problema (2), según se ve por simple derivación. Por ello se dice que (3) es una *ecuación integral equivalente* al problema de valor inicial (2) (ecuación «integral» porque la función incógnita aparece bajo el signo integral). Ocurre que, en la forma (3), el problema de valor inicial se presta, mucho mejor que en la forma (2), a ser abordado por métodos iterativos. Adviértase que, como en otras situaciones que se presentan en el análisis matemático, necesitamos establecer la existencia de una función con determinadas propiedades, aun sin conocerla explícitamente. Esto requiere, normalmente, la utilización de un proceso de aproximación que incluye un «paso al límite». Ese proceso se lleva a cabo más fácilmente manejando integrales que derivadas de funciones.

Busquemos una primera aproximación a la solución de (2). No disponiendo de información suplementaria, esa primera aproximación puede ser, en general imprecisa, desde luego, la función constante

$$x^0(t) = x^0$$

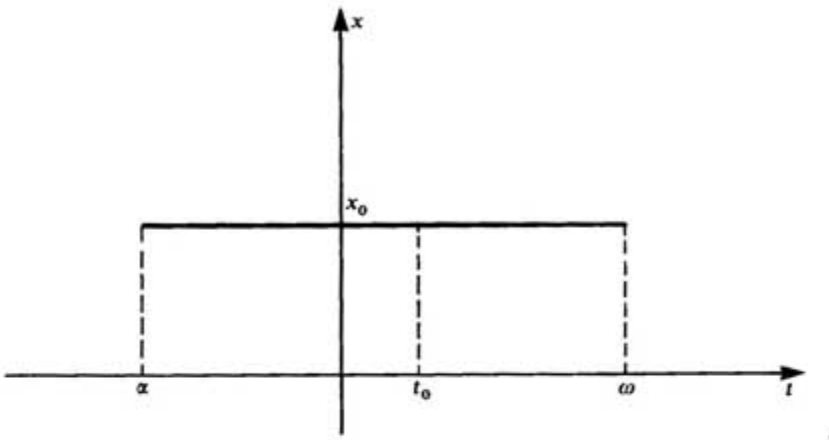


Figura 1

Sustituimos esta función en el segundo miembro de la ecuación integral (3), en la esperanza de obtener una mejor aproximación a la solución de nuestro problema:

$$x^1(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^0(s) + b(s)]ds$$

Utilizamos $x^1(t)$, a su vez, para generar una nueva aproximación:

$$x^2(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^1(s) + b(s)]ds$$

y así sucesivamente:

$$x^j(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^{j-1}(s) + b(s)]ds \tag{4}$$

Mediante este proceso iterativo, en el que actúa la transformación de funciones

$$\varphi(t) \mapsto x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)]ds \tag{5}$$

se obtiene una sucesión de funciones $\{x^j(t)\}$ de la que vamos a poder demostrar que converge [1] en el intervalo (α, ω) a una función $x(t)$ y, además, de la manera apro-

[1] En el apartado 2.2 describiremos la convergencia en $\mathbb{R}^n$. Por el momento, puede imaginarse que las funciones $x^j(t)$ son escalares, o sea, con valores en $\mathbb{R}$.

piada para que sea legítimo el paso al límite en (4) bajo el signo integral:

$$x^j(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^{j-1}(s) + b(s)]ds$$

$$\downarrow \quad (j \to \infty) \qquad \downarrow$$

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds$$

Se tendrá entonces que la función límite satisface la ecuación integral (3), es decir, que es solución del PVI (2) por la equivalencia entre ambos problemas.

Este método de *aproximaciones sucesivas* para obtener la solución del problema (2) se conoce como *método de Picard*, en honor del matemático francés que lo descubrió (Emile Picard, 1856-1941). Veamos cómo actúa en el caso del problema

$$\begin{cases} x' = ax \quad , \quad a \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6}$$

que resolvimos en la introducción. Se tendrá:

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t (ax_0)ds = x_0(1 + at)$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t ax_0(1 + as)ds = x_0\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2}\right)$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t ax_0\left(1 + as + \frac{(as)^2}{2}\right)ds = x_0\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{2 \cdot 3}\right)$$

Y, en general (procediendo por inducción), vemos que

$$x_j(t) = x_0\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{(at)^j}{j!}\right)$$

Reconocemos en la expresión que da $x_j(t)$ la suma parcial j-ésima de la serie de Taylor de x_0e^{at}, la solución que ya conocíamos para el problema (6). En este caso particular, pues, vemos cómo efectivamente las *iterantes de Picard* $x_j(t)$ convergen a la solución del problema de valor inicial. En general, no cabe esperar que los cálculos sean tan sencillos, ni siquiera realizables de manera explícita. Incluso en lo que refiere a la importante cuestión práctica de la aproximación numérica de la solución, existen otros métodos de aproximación más eficaces que el consistente en utilizar las iterantes de Picard como aproximaciones a la solución exacta. Que no sea de mucha aplicabilidad práctica no resta importancia al método de Picard; mediante él se pueden establecer bajo condiciones muy generales la existencia de

soluciones del problema (2) (y del correspondiente problema para la ecuación general no lineal, como veremos en el capítulo 8), cuestión fundamental, como se ha señalado, en el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales. Se tiene, concretamente, el siguiente teorema:

Teorema 1. *Supongamos que $A(t)$ y $b(t)$ son continuas en el intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \quad ; \quad t_0 \in (\alpha, \omega), \ x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados,} \end{cases}$$

tiene una solución única en el intervalo (α, ω).

La demostración de este teorema se hará, como se dijo, en el apartado siguiente. Veamos ahora una consecuencia importante relativa a la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación lineal.

Teorema 2. *El conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea*

$$x' = A(t)x \tag{7}$$

forma un espacio vectorial de dimensión n.

DEMOSTRACIÓN. Que forman espacio vectorial es sencillo: si $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de (7) y a y b son dos constantes reales arbitrarias, se comprueba inmediatamente que $ax(t) + by(t)$ es también solución de (7). Veamos que se trata de un espacio vectorial de dimensión n. Sea $t_0 \in (\alpha, \omega)$, y sean

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e^{(2)} &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{(n)} &= (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

[Se podría tomar otra base cualquiera de $\mathbb{R}^n$, como se apreciará en la demostración.]

Sean $x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, las soluciones (únicas) de (7) que satisfacen

$$x^i(0) = e^{(i)}$$

de acuerdo con el teorema 1 de existencia y unicidad. Estas n soluciones de (7) engendran el espacio de soluciones. En efecto, sea $y(t)$ una solución cualquiera de (7) y sea $y(t_0) = y^0$. Como los vectores $e^{(i)}$ forman base de $\mathbb{R}^n$, existirán unas constantes $c_1, \ldots, c_n$, tales que

$$y^0 = c_1 e^{(1)} + \cdots + c_n e^{(n)}$$

Consideremos la función

$$z(t) = c_1 x^1(t) + \cdots + c_n x^n(t)$$

$z(t)$ es solución de (7), por ser una combinación lineal de soluciones, y verifica

$$z(t_0) = c_1 x^1(t_0) + \cdots + c_n x^n(t_0) =$$
$$= c_1 e^{(1)} + \cdots + c_n e^{(n)} = y^0$$

Por la unicidad de soluciones del PVI relativo a la ecuación (7), habrá de ser $z(t) = y(t)$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$, es decir,

$$y(t) = c_1 x^1(t) + \cdots + c_n x^n(t)$$

Además, las funciones $x^i(t)$ son linealmente independientes. En efecto, supongamos que se tiene

$$a_1 x^1(t) + \cdots + a_n x^n(t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t \in (\alpha, \omega)$$

para unos ciertos escalares $a_1, \ldots, a_n$. En particular:

$$a_1 x^1(t_0) + \cdots + a_n x^n(t_0) = 0$$

o sea,

$$a_1 e^{(1)} + \cdots + a_n e^{(n)} = 0$$

Pero como los vectores $e^{(i)}$ forman base de $\mathbb{R}^n$, habrá de ser

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

[EJERCICIO. Si $x(t)$ es una solución de (1) tal que $x(t_0) = 0$ para un cierto $t_0 \in (\alpha, \omega)$, entonces $x(t) = 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$.]

El teorema anterior describe la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea pero, por sí mismo, no permite encontrar dichas soluciones. Queda, en todo caso, establecido que basta para ello encontrar n soluciones linealmente independientes (o sea, una *base* del espacio de soluciones) de la ecuación; como veremos, ese cálculo será factible para la clase de ecuaciones en que $A(t)$ es una matriz de constantes.

En cuanto a la ecuación lineal *no* homogénea

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{8}$$

la situación es análoga a la del caso escalar: *la solución general se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea $x' = A(t)$ una solución particular de la ecuación «completa»* (8). Esto se demuestra muy fácilmente repitiendo punto por punto los argumentos dados en el caso escalar en el apartado 1.1. Esa solución particular de (8) que se necesita, se puede obtener, en principio, por un «método de variación de las constantes» análogo al del caso escalar y que veremos en el apartado 2.4. [Para llevar ese método a la práctica es necesario, como en el caso

escalar, conocer la solución general de la ecuación homogénea asociada, pero esto, como acabamos de decir, no es posible lograrlo en el caso de un sistema lineal general. Quedará, en todo caso, bien establecida la estructura del conjunto de soluciones de (8), permitiendo las fórmulas que obtendremos en el apartado 2.4, si no el conocimiento explícito de dichas soluciones, sí la obtención de propiedades cualitativas de las mismas que serán de gran interés en el desarrollo de la teoría y en las aplicaciones.]

2.2. Demostración del teorema fundamental de existencia y unicidad

Para la demostración del teorema 1 de existencia y unicidad del apartado anterior serán necesarios argumentos que requieren la noción de *convergencia* en $\mathbb{R}^n$. Como en las demás nociones sobre vectores y funciones vectoriales ya vistas en la introducción y en el apartado 2.1, diremos simplemente que la sucesión $\{x^k\} \equiv \equiv \{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$ *converge al límite* $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (y escribiremos $\lim_{k\to\infty} x^k = x$) si

$$\lim_{k\to\infty} |x_i^k - x_i| = 0 \tag{1}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, o sea, si se tiene convergencia en $\mathbb{R}$, coordenada a coordenada.

Para que las manipulaciones a realizar resulten más simples, conviene introducir una *norma* de vectores (puntos) de $\mathbb{R}^n$ que generalice la noción de valor absoluto de un punto (número real) de $\mathbb{R}$. La *norma (rectangular)* de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es la cantidad

$$|x| = |x_1| + \cdots + |x_n| \tag{2}$$

De las propiedades del valor absoluto en $\mathbb{R}$ derivan inmediatamente las siguientes propiedades esenciales de la norma en $\mathbb{R}^n$:

$$|x| \geqslant 0 \quad \text{y} \quad |x| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = 0 \tag{3}$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \tag{4}$$

$$|cx| = |c|\,|x| \quad , \quad c \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Con la definición de norma en $\mathbb{R}^n$ es claro que decir que

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x$$

es equivalente a decir que

$$\lim_{k\to\infty} |x^k - x| = 0 \tag{6}$$

[La definición de convergencia de sucesiones resulta así formalmente la misma en todo $\mathbb{R}^n$, cualquiera que sea $n \geqslant 1$.]

Si $x(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, se tendrá

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(s)ds \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} |x(s)|ds \right| \tag{7}$$

como se comprueba fácilmente argumentando sobre cada componente.

Para una matriz $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, elemento de $\mathbb{R}^{n^2}$, la norma, de acuerdo con (2), estará dada por

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{8}$$

Además de las propiedades (3), (4), y (5), se puede comprobar que se cumple

$$|Ax| \leqslant |A|\,|x| \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

y

$$|A \cdot B| \leqslant |A|\,|B| \tag{10}$$

donde B es otra matriz $n \times n$.

En cuanto se tiene la noción de convergencia en $\mathbb{R}^n$ se puede, como en $\mathbb{R}$, dar el concepto de *serie:* Dada una sucesión $\{x^k\}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ se forma la *sucesión de sumas parciales* $\{S_N\}$, donde

$$S_N = x^1 + \cdots + x^N \tag{11}$$

Si ocurre que

$$\lim_{k \to \infty} S_N = S \in \mathbb{R}^n$$

se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = S \tag{12}$$

o simplemente $\Sigma x^k = S$, y se dice que la *serie* Σx^k *converge a* S (o que la *suma de la serie* es S).

Es claro que la serie Σx^k en $\mathbb{R}^n$ es convergente si, y sólo si, son convergentes todas y cada una de las series numéricas Σx_i^k, $i = 1, \ldots, n$.

Se dice que la serie Σx^k es *absolutamente convergente*, si la serie de números reales $\Sigma |x^k|$ es convergente. Como en $\mathbb{R}$, se comprueba que si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Un criterio útil para la convergencia absoluta es, también como en $\mathbb{R}$, el *criterio de comparación* de Weierstrass: Si Σx^k es tal que $|x^k| \leqslant a_k \in \mathbb{R}$ y la serie de números

reales no negativos Σa_k es convergente, entonces Σx^k es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente). En efecto, se tendrá:

$$0 \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |x^k| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} a_k$$

con lo que, por el criterio de Cauchy aplicado a las sucesiones de sumas parciales de $\Sigma |x^k|$ y Σa_k, resultará que $\Sigma |x^k|$ es convergente.

También precisamos considerar sucesiones y series de funciones $t \mapsto x(t)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. El concepto de *convergencia uniforme* se extiende también sin dificultad a funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$: Si $\{x^k(t)\}$ es una sucesión de funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}^n$, se dice que converge uniformemente a $x(t)$: $I \to \mathbb{R}^n$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x^k(t) - x(t)| < \varepsilon$ para todo $k \geqslant N$ y *cualquiera que sea* $t \in I$. Del resultado análogo conocido en $\mathbb{R}$, se tiene inmediatamente que si las funciones *continuas* $x^k(t)$ convergen a $x(t)$ uniformemente en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces la función límite $x(t)$ es *continua* en $[a, b]$. Combinando esto con el criterio de comparación de Weierstrass se tendrá el siguiente resultado:

> Sea $\{x^k(t)\}$ una sucesión de funciones definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$. Si existe una sucesión de números reales $\{a_k\}$ tales que $|x^k(t)| \leqslant a_k$ para todo $t \in [a, b]$, y la serie Σa_k es convergente, entonces la serie de funciones $\Sigma x^k(t)$ converge uniformemente en $[a, b]$ y la función
>
> $$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k(t)$$
>
> es continua en $[a, b]$.

NOTA. Estas nociones simples que acabamos de ver son suficientes para seguir la mayor parte del presente curso. En *Ecuaciones diferenciales II* se repasan con más detalle los elementos básicos de la topología de $\mathbb{R}^n$, con algunas cuestiones especiales que serán utilizadas en la segunda parte del curso.

Pasemos ya a la demostración del teorema fundamental de existencia y unicidad. Veamos, en primer lugar, la existencia de solución por el método de Picard esbozado anteriormente. Consideremos, pues, la sucesión de funciones de (α, ω) en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{cases} x^0(t) = x^0 \\ x^j(t) = x^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)x^{j-1}(s) + b(s)]ds, \; j \geqslant 1 \end{cases} \tag{13}$$

Observemos que $x^N(t)$, $N \geqslant 1$, es la suma parcial N-ésima de la serie

$$x^0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} [x^j(t) - x^{j-1}(t)] \tag{14}$$

con lo que la convergencia de la sucesión (13) es equivalente a la convergencia de esta serie (14). Vamos a probar que

a) La serie (14) converge en (α, ω) a una función $x(t)$.

b) La función $x(t)$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \quad ; \quad t_0 \in (\alpha, \omega),\ x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados} \end{cases} \tag{15}$$

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado contenido en (α, ω) y tal que $a \leqslant t_0 \leqslant b$, y pongamos

$$K = \text{máx } \{|A(t)| \quad ; \quad t \in [a, b]\}$$

[$|A(t)|$ es una función real continua y alcanza su valor máximo en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$.]

Se tiene, para $t \in [a, b]$,

$$|x^1(t) - x^0| = \left| \int_{t_0}^{t} [A(s)x^0 + b(s)]ds \right| \leqslant M|t - t_0|$$

con $M = K|x^0| + \text{máx } \{|b(s)| \quad ; \quad s \in [a, b]\}$.

Análogamente

$$|x^2(t) - x^1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[x^1(t) - x^0]ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)||x^1(t) - x^0|ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant MK \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds \right| \leqslant MK \frac{|t - t_0|^2}{2!}$$

Y, en general, procediendo por inducción:

$$|x^j(t) - x^{j-1}(t)| \leqslant MK^{j-1} \frac{|t - t_0|^j}{j!} \leqslant \frac{M}{K} \frac{K^j(b - a)^j}{j!}$$

para todo $t \in [a, b]$.

O sea,

$$\max_{t \in [a, b]} |x^j(t) - x^{j-1}(t)| \leqslant \frac{M}{K} \frac{K^j(b - a)^j}{j!}$$

Y como la serie numérica

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M}{K} \frac{K^j(b - a)^j}{j!}$$

es convergente (siendo su suma $M/K\ (e^{K(b-a)}-1)$), se tendrá, por el criterio de Weierstrass, que la serie de funciones (14) convergen *uniformemente* en $[a, b]$ a una función $x(t)$ que será continua. Teniendo en cuenta que $[a, b]$ es un subintervalo cerrado y acotado arbitrario de (α, ω), con $t_0 \in [a, b]$, se tendrá que $x^j(t) \to x(t)$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$, siendo esa convergencia uniforme en cada uno de esos subintervalos $[a, b]$.

Probemos ahora que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)x^j(s) + b(s)]ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds \tag{16}$$

Como la convergencia $x^j(t) \to x(t)$ es uniforme en $[a, b]$, dado un $\varepsilon > 0$, se tendrá:

$$|x^j(s) - x(s)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad s \in [a, b]$$

para j suficientemente grande. Entonces:

$$\left| \int_{t_0}^{t} [A(s)x^j(s) + b(s)]ds - \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds \right| = \left| \int_{t_0}^{t} [A(s)[x^j(s) - x(s)]]ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant K\varepsilon|t - t_0| \leqslant K(b - a)\varepsilon$$

con j suficientemente grande; es decir, se tiene (16), de donde se deduce que

$$x(t) = \lim_{j\to\infty} x^j(t) = \lim_{j\to\infty} \left\{ x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x^{j-1}(s) + b(s)]ds \right\} =$$

$$= x^0 + \lim_{j\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)x^{j-1}(s) + b(s)]ds =$$

$$= x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds$$

para todo $t \in [a, b]$.

Y como $[a, b]$ era un subintervalo cerrado y acotado arbitrario del intervalo (α, ω), con $t_0 \in [a, b]$, se tendrá que $x(t)$ satisface

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$, es decir, es solución en (α, ω) del problema de valor inicial (15).

Para probar la unicidad utilizaremos un resultado que tendrá aplicación en diversas ocasiones:

Lema 1 *(lema de Gronwall). Sea* $u: [t_0, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y no negativa. Supongamos que*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} Ku(s)ds \quad , \quad t \in [t_0, b] \tag{17}$$

para unas constantes $C \geqslant 0$, $K \geqslant 0$. *Entonces*

$$u(t) \leqslant Ce^{K(t-t_0)}$$

para todo $t \in [t_0, b]$.

Supuesto demostrado el lema, sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones del PVI (15) en (α, ω). Entonces

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)[x(s) - y(s)]]ds \tag{18}$$

Tomando b tal que $t_0 \leqslant b < \omega$, se obtiene de (18):

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} K|x(s) - y(s)|ds$$

donde $K = \text{máx } \{|A(t)|;\ t \in [t_0, b]\}$.

Aplicando el lema de Gronwall a $u(t) = |x(t) - y(t)|$, resulta

$$|x(t) - y(t)| = 0$$

es decir, $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0, b]$. De manera análoga se prueba que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [a, t_0]$, con $\alpha < a \leqslant t_0$, y como a y b son arbitrarios, con la condición de que $\alpha < a \leqslant t_0 \leqslant b < \omega$, se tendrá que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$.

[EJERCICIO. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las soluciones de $x' = A(t)x + b(t)$ que satisfacen, respectivamente, $x(t_0) = x^0$, $y(t_0) = y^0$, con $t_0 \in (\alpha, \omega)$. Dado $T \in (t_0, \omega)$, probar que existe $K \geqslant 0$ tal que

$$|x(t) - y(t)| \leqslant e^{K(t-t_0)}|x^0 - y^0|$$

para todo $t \in [t_0, T]$. Este resultado refleja la continuidad de la solución respecto al dato inicial: a datos próximos corresponden soluciones próximas-en intervalos finitos de tiempo.]

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. *a*) Supongamos, en primer lugar, que $C > 0$. Definamos la función

$$U(t) = C + \int_{t_0}^{t} Ku(s)ds \tag{19}$$

Se tiene que $U(t) > 0$ (pues $C > 0$ y la integral es $\geqslant 0$) y, por hipótesis,

$$u(t) \leqslant U(t), \text{ para todo } \quad t \in [t_0, b]$$

Derivando en (19):

$$U'(t) = Ku(t)$$

de donde ($U(t) > 0$):

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = K \frac{u(t)}{U(t)} \leqslant K$$

O sea,

$$\frac{d}{dt} (\ln U(t)) \leqslant K$$

$$\ln U(t) \leqslant \ln U(t_0) + K(t - t_0)$$

es decir,

$$U(t) \leqslant Ce^{K(t-t_0)}$$

(pues $U(t_0) = C$) y, por tanto,

$$u(t) \leqslant Ce^{K(t-t_0)}$$

b) Para $C = 0$, se pone

$$u(t) \leqslant U_\varepsilon(t) = \varepsilon + \int_{t_0}^{t} Ku(s)ds \quad , \quad \varepsilon > 0$$

Por lo anterior se tiene

$$u(t) \leqslant \varepsilon e^{K(t-t_0)}$$

para todo $\varepsilon > 0$, de donde $u(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, b]$.

[EJERCICIO. ¿Por qué no se puede demostrar el lema de Gronwall derivando directamente en la desigualdad (17)?]

2.3. Matrices fundamentales

Para simplificar determinados cálculos y argumentos, es útil introducir la siguiente definición.

Definición 1. *Se dice que una matriz* $\Phi(t)$ *es* matriz fundamental *de la ecuación*

$$x' = A(t)x \tag{1}$$

si sus n columnas son n soluciones linealmente independientes de dicha ecuación.

En otras palabras, si

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \phi^1(t), & ..., & \phi^n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

donde

$$\phi^j(t) = \begin{bmatrix} \phi_1^j(t) \\ \vdots \\ \phi_n^j(t) \end{bmatrix} \quad (j = 1, ..., n)$$

entonces $\Phi(t)$ es matriz fundamental de la ecuación (1) si las funciones vectoriales $\phi^j(t)$ $(j = 1, ..., n)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x' = A(t)x$, o sea, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación.

Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (1), el conjunto de soluciones de (1) se podrá representar por

$$\Phi(t)c \tag{2}$$

siendo $c = (c_1, ..., c_n)$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$. En efecto, la combinación lineal

$$c_1\phi^1(t) + \cdots + c_n\phi^n(t)$$

toma la forma (2) en notación matricial.

Resolver la ecuación (1) se reduce, pues, a encontrar una matriz fundamental.

Proposición 1. *Sea* $\Phi(t)$ *una matriz cuyas columnas son soluciones de* (1). *Una condición necesaria y suficiente para que* $\Phi(t)$ *sea matriz fundamental de* (1) *es que exista un* $t_0 \in (\alpha, \omega)$ *tal que* $\det \Phi(t_0) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN.

a) Si $\det \Phi(t_0) \neq 0$, las columnas de $\Phi(t_0)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes. Consideremos, como en la demostración del teorema 2 del apartado 2.1, una ecuación de la forma

$$a_1\phi^1(t) + \cdots + a_n\phi^n(t) = 0 \quad , \quad a_j \in \mathbb{R}$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$. Se tendrá, en particular, para $t = t_0$:

$$a_1\phi^1(t_0) + \cdots + a_n\phi^n(t_0) = 0$$

lo cual implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$, por la independencia lineal de los vectores $\phi^j(t_0)$ de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, que las funciones vectoriales $\phi^j(t)$, columnas de $\Phi(t)$, son linealmente independientes.

b) Recíprocamente, si las columnas de $\Phi(t)$ son funciones linealmente independientes, entonces $\det \Phi(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$. En efecto, supongamos que existiese un $t^* \in (\alpha, \omega)$ tal que $\det \Phi(t^*) = 0$, o sea, tal que

$$a_1\phi^1(t^*) + \cdots + a_n\phi^n(t^*) = 0$$

para unos ciertos escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos. La función

$$z(t) = a_1\phi^1(t) + \cdots + a_n\phi^n(t)$$

es solución de la ecuación (1) y satisface $z(t^*) = 0$. Por la unicidad de solución del PVI relativo a (1), con t^* como instante inicial, habrá de ser $z(t) = 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$, es decir,

$$a_1\phi^1(t) + \cdots + a_n\phi^n(t) = 0$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$, y, en consecuencia, las columnas de $\Phi(t)$ serían linealmente independientes, contrariamente a la hipótesis.

Corolario. *Sea* $\Phi(t)$ *una matriz cuyas columnas son soluciones de* (1); $\det \Phi(t) \neq 0$ *para todo* $t \in (\alpha, \omega)$ *si y sólo si* $\det \Phi(t_0) \neq 0$ *para un* $t_0 \in (\alpha, \omega)$ *concreto.*

NOTA. Obsérvese que en la primera parte de la demostración no interviene para nada el que las funciones $\phi^j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ sean soluciones de la ecuación diferencial. Se tiene, por tanto, que para que n funciones (vectoriales) de $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ sean linealmente independientes, es suficiente que exista un $t_0 \in (\alpha, \omega)$ tal que los vectores $\phi^1(t_0), \ldots, \phi^n(t_0)$ de $\mathbb{R}^n$ sean linealmente independientes, lo que es equivalente a que $\det \Phi(t_0) \neq 0$.

En la segunda parte de la demostración, por el contrario, interviene decisivamente el que las funciones $\phi^j(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial. En otro caso, puede muy bien ocurrir que $\det \Phi(t) = 0$, para todo $t \in (\alpha, \omega)$, y que las columnas de $\Phi(t)$ sean funciones linealmente independientes. Por ejemplo, las funciones

$$\phi^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi^2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

son linealmente independientes y, sin embargo, $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo $\Phi(t)$ la matriz cuyas columnas son $\phi^1(t)$ y $\phi^2(t)$. Naturalmente, estas dos funciones no podrán ser soluciones de una misma ecuación diferencial (véase el problema 3).

Entonces, si $\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t)$ son soluciones de la ecuación $x' = A(t)x$, la independencia lineal de dichas funciones es equivalente a que $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \omega)$, siendo $\Phi(t)$ la matriz que las

tiene por columnas. Pero esta afirmación no es válida para funciones vectoriales cualesquiera (det $\Phi(t) \neq 0$ es condición suficiente pero no necesaria para la independencia lineal).

Así pues, si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental, $\Phi(t)$ es una matriz no singular, cualquiera que sea $t \in (\alpha, \omega)$. Entonces, la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x^0 \quad ; \quad t_0 \in (\alpha, \omega),\ x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados} \end{cases} \tag{3}$$

está dada, de acuerdo con (2), por

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 \tag{4}$$

siendo $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la ecuación (1).

Obsérvese que para el producto de dos matrices $n \times n$, Φ y C, se tiene que

$$\Phi \cdot C = \begin{bmatrix} | & & | \\ \phi c^1, & \ldots, & \phi c^n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

es decir, que la columna j-ésima de ΦC es el vector que resulta al aplicar la matriz Φ al vector columna j-ésima c^j de C.

Por tanto, si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (1) y C es una matriz de constantes, $\Phi(t)C$ es una matriz cuyas columnas son soluciones de (1), de acuerdo con (2). Y, recíprocamente, si $\Phi_1(t)$ es una matriz cuyas columnas son soluciones de (1), se tendrá que $\Phi_1(t) = \Phi(t)C_1$ para una cierta matriz de constantes C_1, teniendo en cuenta que las columnas de $\Phi(t)$ forman una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea (1). Se tiene entonces:

Proposición 2. *Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$, y C es una matriz constante no singular, entonces $\Phi(t)C$ es también una matriz fundamental. Si $\Phi_1(t)$ es otra matriz fundamental, existe una matriz constante no singular C_1, tal que $\Phi_1(t) = \Phi(t)C_1$.*

Para completar la demostración, basta tener en cuenta que det $(AB) = (\det A)(\det B)$, para dos matrices A y B, junto con la proposición 1.

Hay otra forma de contemplar estas matrices $X(t)$ cuyas columnas son soluciones de la ecuación $x' = A(t)x$. Si, como antes, se tiene presente que la columna j-ésima del producto de matrices $A(t)X(t)$ es el vector que resulta de aplicar la matriz $A(t)$ al vector columna j-ésima de $X(t)$, $X^j(t)$, vemos, teniendo en cuenta que ésta última satisface

$$\frac{d}{dt}[X^j(t)] = A(t)X^j(t)$$

que se tiene

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{5}$$

o sea, que decir que $X(t)$ es una matriz cuyas columnas son soluciones de $x' = A(t)x$, es equivalente a decir que $X(t)$ es solución de la *ecuación diferencial matricial* (5). Ésta es, simplemente, un sistema de n^2 ecuaciones diferenciales lineales escalares al que se aplica el teorema fundamental de existencia y unicidad enunciado en el apartado 2.1 y demostrado en el apartado 2.2. Los argumentos previos a la proposición 2 muestran que

Proposición 3. *Las soluciones de la ecuación diferencial matricial* $X' = A(t)X$ *están dadas por*

$$X(t) = \Phi(t)C$$

donde $\Phi(t)$ *es una matriz fundamental de* $x' = A(t)x$ *y* C *una matriz de constantes.*

Proposición 4 (*fórmula de Liouville*). *Sea* $\Phi(t)$ *una matriz cuyas columnas son soluciones de* (1). *Entonces, para todo* $t \in (\alpha, \omega)$ *y* $t_0 \in (\alpha, \omega)$ *fijo se tiene*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} [\text{traza } A(s)]ds \tag{6}$$

$$\left[\textit{donde } \text{traza } A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s). \right]$$

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$\Phi(t) = (\phi_{ij}(t)) \quad \text{y} \quad A(t) = (a_{ij}(t))$$

La derivada de $\det \Phi(t)$ es una suma de determinantes:

$$(\det \Phi(t))' = \begin{bmatrix} \phi'_{11}(t) & \phi'_{12}(t) & \cdots & \phi'_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi'_{21}(t) & \phi'_{22}(t) & \cdots & \phi'_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi'_{n1}(t) & \phi'_{n2}(t) & \cdots & \phi'_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

(Demuéstrese por inducción.)
Pero, por hipótesis,

$$\phi'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\phi_{kj}(t)$$

con lo que en el primer determinante de la suma anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sum_k a_{1k}(t)\phi_{k1}(t) & \sum_k a_{1k}(t)\phi_{k2}(t) & \cdots & \sum_k a_{1k}(t)\phi_{kn}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

y este determinante no cambia si se resta a la primera fila la segunda multiplicada por $a_{12}(t)$ más la tercera multiplicada por $a_{13}(t)$, etc., hasta la n-ésima multiplicada por $a_{1n}(t)$, lo que da el valor

$$\begin{bmatrix} a_{11}(t)\phi_{11}(t) & a_{11}(t)\phi_{12}(t) & \cdots & a_{11}(t)\phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

es decir, $a_{11}(t)$ det $\Phi(t)$. Haciendo lo mismo con los demás determinantes de la suma se obtiene

$$(\det \Phi(t))' = (\text{traza } A(t)) \det \Phi(t) \tag{7}$$

es decir, det $\Phi(t)$ satisface la ecuación escalar lineal

$$x' = (\text{traza } A(t))x'$$

de donde se deduce (6) de acuerdo con (5) del apartado 1.1.

NOTA. De la fórmula de Liouville (6) se deduce de nuevo el corolario de la proposición 1.

2.3.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Cuando la matriz A es constante, las soluciones de $x' = Ax$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, de acuerdo con el teorema 1 del apartado 2.1. Denotemos por $\Phi(t)$ la matriz fundamental de $x' = Ax$ tal que $\Phi(0) = I$ (I es la matriz identidad $n \times n$. La columna j-ésima de $\Phi(t)$ es la solución $\phi^j(t)$ de $x' = Ax$ que satisface la condición inicial $\phi^j(0) = (0, ..., 1, ..., 0)$, con el 1 en el lugar j). $\Phi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y se tiene la siguiente

Proposición 5

a) *La solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

es $x(t) = \Phi(t)x^0$.

b) $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$, *cualesquiera que sean* $t, s \in \mathbb{R}$.

c) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

DEMOSTRACIÓN

a) Véase (4) y téngase en cuenta que $\Phi(0) = I$.

b) Fijado $s \in \mathbb{R}$, las matrices

$$\Phi_1(t) = \Phi(t + s)$$
$$\Phi_2(t) = \Phi(t)\Phi(s)$$

son ambas soluciones del problema

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \Phi(s) \end{cases}$$

[Para derivar $\Phi_2(t)$, nótese que para el elemento de lugar (i, j) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma\ \phi_i^k(t)\phi_k^j(s)\right) = \Sigma\ (\phi_i^k(t))'\phi_k^j(s)$$

o sea, el elemento (i, j) de $\Phi'(t)\Phi(s)$. Por otro lado, esto es consecuencia inmediata de la proposición 1 del apartado siguiente.] Por la unicidad de solución para este problema de valor inicial, se tendrá que: $\Phi_1(t) \equiv \Phi_2(t)$.

c) Se deduce de *b*) haciendo $s = -t$.

NOTAS

1. Como las soluciones de $x' = Ax$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, basta que consideremos el PVI con instante inicial $t_0 = 0$. Si $t_0 \neq 0$, la solución de $x' = Ax$, $x(t_0) = x^0$, estará dada por $x(t) = \Phi(t - t_0)x^0$, siendo $\Phi(t)$, como venimos suponiendo, la matriz fundamental tal que $\Phi(0) = I$.

2. La propiedad *c*), en particular, será útil a la hora de aplicar la fórmula de variación de las constantes para resolver la ecuación no homogénea (véase apartado 2.4).

3. Obsérvese que las propiedades

$$\begin{cases} \Phi(0) = I \\ \Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s) \end{cases}$$

son las que caracterizan a la función exponencial escalar

$$\begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{t+s} = e^t \cdot e^s \end{cases}$$

Y nótese también que en el caso escalar $x' = ax$, que sabemos resolver explícitamente, se tiene que $\Phi(t) = e^{at}$. Será natural, por ello, denotar a esa matriz fundamental de $x' = Ax$, tal que $\Phi(0) = I$ por e^{tA} o exp (tA). Trataremos esta cuestión en el capítulo 5.

4. Puesto que $\Phi(t)$ es una matriz no singular, cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$, se tiene definido para cada $t \in \mathbb{R}$ un isomorfismo Φ_t en $\mathbb{R}^n$ por

$$x \mapsto \Phi(t)x \underset{\text{def}}{=} \Phi_t(x)$$

A un $x \in \mathbb{R}$, Φ_t le hace corresponder el punto de $\mathbb{R}^n$ que se «alcanza en el instante t» dado por la solución que «empezó» en x para $t = 0$. La propiedad *b*), junto con $\Phi_0 =$ Identidad, establece que esa familia de isomorfismos, con $t \in \mathbb{R}$, constituye un grupo.

2.4. Sistemas lineales no homogéneos. La fórmula de variación de las constantes

Consideremos ahora la ecuación lineal no homogénea

$$x' = A(t)x + b(t)$$

Como señalábamos en el apartado 2.1, y de acuerdo con (2) del apartado 2.3, la solución general de (1) estará dada por la expresión

$$x(t) = \Phi(t)c + x_p(t)$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$, c es un vector de $\mathbb{R}^n$ arbitrario y $x_p(t)$ es una cierta solución particular de (1).

En términos coloquiales, diremos que «la solución general de la ecuación no homogénea se obtiene sumando a la solución general de la homogénea una solución particular de la no homogénea».

Si se conoce la solución general de $x' = A(t)x$ (es decir, si se conoce una matriz fundamental), se puede aplicar un método general para encontrar una solución particular de (1), que es una generalización del método de variación de las constantes que vimos para las ecuaciones escalares lineales.

Teorema 1 *(Variación de las constantes). Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$; entonces*

$$x_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds \quad , \quad t, t_0 \in (\alpha, \omega) \tag{3}$$

es la solución particular de $x' = A(t)x + b(t)$ *que satisface la condición inicial* $x(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

La demostración de este teorema consiste en una simple comprobación, teniendo en cuenta la siguiente regla de derivación para funciones vectoriales y matriciales, regla que generaliza la de derivación de un producto de funciones escalares y que es completamente análoga a ésta, teniendo la precaución de no permutar los factores:

Proposición 1. *Sean* $A(t)$ *y* $B(t)$ *dos funciones matriciales definidas y derivables en un intervalo* $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ *y sea* $x(t)$ *una función vectorial también definida y derivable en el intervalo* (α, ω). *Entonces*:

a) $$\frac{d}{dt}(A(t)x(t)) = \frac{dA(t)}{dt}x(t) + A(t)\frac{dx(t)}{dt}$$

b) $$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt}$$

DEMOSTRACIÓN

a) Si $A(t) = (a_{ij}(t))$, y

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

la componente i-ésima del vector $A(t)x(t)$ es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)$$

y, por la regla de derivación del producto de funciones escalares,

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x'_j(t)$$

El primer sumatorio es la componente i-ésima del vector $A'(t)x(t)$, y el segundo, la componente i-ésima de $A(t)x'(t)$, de donde la primera parte de la proposición.

b) Siendo

$$B(t) = \begin{bmatrix} | & & | \\ b^1(t), & \ldots, & b^n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

se tiene, utilizando *a*),

$$(A(t)B(t))' = \begin{bmatrix} | & | \\ (A(t)b^1(t))', \ldots, & (A(t)b^n(t))' \\ | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | \\ A'(t)b^1(t) + A(t)\dfrac{d}{dt}b^1(t), \ldots, & A'(t)b^n(t) + A(t)\dfrac{d}{dt}b^n(t) \\ | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | \\ A'(t)b^1(t), \ldots, & A'(t)b^n(t) \\ | & | \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | & | \\ A(t)\dfrac{d}{dt}b^1(t), \ldots, & A(t)\dfrac{d}{dt}b^n(t) \\ | & | \end{bmatrix} =$$

$$= A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

El nombre del método y su motivación tienen el mismo fundamento que en las ecuaciones lineales escalares: partiendo de la solución general de la ecuación homogénea,

$$x(t) = \Phi(t)c \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n$$

se conjetura la existencia de una solución de la ecuación no homogénea que sea de la forma $\Phi(t)c(t)$ (se «varían las constantes»). Habrá de ser

$$(\Phi(t)c(t))' = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$$

O sea,

$$\begin{aligned} A(t)\Phi(t)c(t) + b(t) &= \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = \\ &= (\Phi(t) \text{ es matriz fundamental}) = \\ &= A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $\Phi(t)$ es no singular para todo $t \in (\alpha, \omega)$,

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$$

ecuación en $c(t)$ que tiene la solución

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

con la que se obtiene la expresión (3).

Corolario. *La solución del PVI*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \quad ; \quad t_0 \in (\alpha, \omega),\ x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ dados} \end{cases}$$

es

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds \tag{4}$$

Si, en particular, $A(t) = A$, matriz constante, $t_0 = 0$ y $\Phi(t)$ es tal que $\Phi(0) = I$, entonces (4) *toma la forma*

$$x(t) = \Phi(t)x^0 + \int_0^t \Phi(t - s)b(s)ds$$

EJEMPLO. Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \tag{5}$$

Se comprueba fácilmente que las funciones

$$\phi^1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \quad , \quad \phi^2(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{6}$$

son soluciones del sistema homogéneo asociado

$$x' = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

[En el apartado 3.2 del capítulo siguiente veremos cómo se resuelven estos sistemas.] Además, la matriz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \tag{8}$$

verifica que

$$\det \Phi(t) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \neq 0 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

es decir, es una matriz fundamental del sistema (7), de acuerdo con la proposición 1 del apartado 2.3. Se tiene que $\Phi(0) = I$, con lo que, por la proposición 5 de ese

mismo apartado 2.3, se tendrá que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ por ser A una matriz constante.

Para el cálculo de una solución particular se tiene:

$$x_p(t) = \int_0^t \Phi(t-s)b(s)ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & -\text{sen } s \\ \text{sen } s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -s \text{ sen } s \\ s \cos s \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \cos t - \text{sen } t \\ t \text{ sen } t + \cos t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \text{sen } t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$$

[Nótese que no es difícil ver por simple inspección que la función

$$x_q(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

es también solución de (5), aunque no verifica

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y nótese que

$$x_q(t) - x_p(t) = \begin{bmatrix} \text{sen } t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

que es, claro, solución de la ecuación homogénea (7). El método de variación de las constantes es de validez general, pero no siempre significa los cálculos más sencillos.]

2.5. La ecuación diferencial de orden *n*

Usualmente, una *ecuación diferencial (escalar) lineal de orden n* se da en la forma (por razones que se verán en los apartados 4.4 y 5.4).

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \tag{1}$$

donde $a_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$ y $b(t)$ son funciones continuas en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$.

La ecuación es *homogénea* cuando $b(t) = 0$, para todo $t \in (\alpha, \omega)$. Haciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x' = x_2 \\ x'' = x_3 \\ \vdots \\ x^{(n-2)} = x_{n-1} \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases}$$

la ecuación homogénea

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \tag{2}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n \end{cases} \tag{3}$$

o sea, $x' = A(t)x$, con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial de dimensión n. Esto se deriva del teorema 2 del apartado 2.1 aplicado al sistema equivalente (3), teniendo en cuenta que las soluciones de (2) están dadas por las primeras componentes de las funciones vectoriales que son soluciones de dicho sistema.

Una base del espacio de soluciones está dada por las funciones $\varphi^j(t)$ ($j = 1, \ldots, n$), soluciones (únicas) de la ecuación (2) que satisfacen las condiciones iniciales

$$\varphi_j(t_0) = 0,\ \varphi_j'(t_0) = 0,\ \ldots,\ \varphi_j^{(j-1)}(t_0) = 1,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = 0 \tag{5}$$

con $t_0 \in (\alpha, \omega)$. [O sea, $\varphi_1(t)$ es la solución única del PVI

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \\ x(t_0) = 1 \quad , \quad x'(t_0) = 0, \ \ldots \ , \quad x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad , \quad t_0 \in (\alpha, \omega), \end{cases}$$

etcétera.]

Si $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ es una base del espacio de soluciones de (2), la correspondiente matriz fundamental estará dada por

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

El determinante de $\Phi(t)$ se denomina determinante *wronskiano* [2] de las funciones $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, y se denota por $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. La fórmula de Liouville toma aquí la forma

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds\right) \tag{7}$$

NOTA. Si las funciones escalares $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ son linealmente dependientes en (α, ω), entonces su wronskiano, definido como el determinante de la correspondiente matriz (6), será nulo en (α, ω). Pero, como veíamos en el apartado 2.3, el recíproco no es cierto: puede ser nulo dicho wronskiano y, sin embargo, ser linealmente independientes las funciones $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, si no se exige de estas que sean soluciones de una ecuación de la forma (2). Considérese, por ejemplo, el par de funciones $\varphi_1(t) = t^3$ y $\varphi_2(t) = |t|^3$ en $(-\infty, \infty)$.

En el caso de las ecuaciones de segundo orden,

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

la fórmula de Liouville se puede utilizar para construir una base de soluciones (y, con ella, obtener la solución general de la ecuación) *supuesto que se conoce una solución* $x(t) = \varphi_1(t)$. En efecto, supongamos que, además, $\varphi_1(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$. El teorema 2 del apartado 2.1 garantiza que existe una segunda solución $\varphi_2(t)$ en (α, ω) que es linealmente independiente de $\varphi_1(t)$. Por la fórmula de Liouville:

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} = c_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds\right) \tag{8}$$

---

[2] Höené Wronski (1766-1853) nació en Polonia y vivió desde 1800 en Francia dando clase de matemáticas y dedicado al cultivo del ocultismo. Trató de establecer nada menos que una «fórmula del absoluto» de la que se deducirían matemáticamente todas las actividades humanas.

donde c_0 es el valor del wronskiano en $t = t_0$. Desarrollando (8) se tiene

$$\varphi_2'(t) - \frac{\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)}\varphi_2(t) = \frac{c_0}{\varphi_1(t)} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds\right) \tag{9}$$

ecuación diferencial lineal de primer orden en $\varphi_2(t)$; $c_0 = (\varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_1'(t_0)\varphi_2(t_0))$ se determina mediante los valores iniciales $\{\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0)\}$, conocidos, y valores iniciales $\{\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0)\}$ prefijados de modo que constituyan un vector en $\mathbb{R}^2$ linealmente independiente de $\{\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0)\}$, lo que, como sabemos, garantiza que dan lugar a soluciones linealmente independientes.

EJEMPLO. Sea la ecuación

$$x'' - \frac{2t}{1+t^2}x' + \frac{2}{1+t^2}x = 0 \quad , \quad t > 0$$

Es fácil ver que $\varphi_1(t) = t$ es solución de la ecuación; $\varphi_1(t)$ es distinta de 0 en el intervalo $(0, \infty)$, y tomando $t_0 = 1$ vemos que $\varphi_1(1) = 1$ y $\varphi_1'(1) = 1$. La solución $\varphi_2(t)$ correspondiente a las condiciones iniciales $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_2'(1) = 1$, que será linealmente independiente de $\varphi_1(t)$ dado que

$$c_0 = W(\varphi_1, \varphi_2)(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

satisfará la ecuación de primer orden

$$y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{-2s}{1+s^2}\,ds\right)$$

es decir,

$$y' - \frac{1}{t}y = \frac{1+t^2}{2t}$$

Integrando esta última por el método de variación de las constantes, se obtiene que la solución general está dada por

$$y(t) = Ct + \frac{1}{2}(t^2 - 1) \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

La solución que satisface $y(1) = 0$ será nuestra $\varphi_2(t)$, a saber,

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación de segundo orden propuesta será:

$$x(t) = C_1 t + C_2(t^2 - 1) \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

[La ecuación se propuso en el intervalo $(0, \infty)$ para que el método fuese válido, dado que hay que dividir por $\varphi_1(t)$, pero obsérvese que la anterior es la solución de la ecuación, planteada ésta en todo $\mathbb{R}$.]

Para resolver la ecuación no homogénea (1), se pasaría al sistema equivalente

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \bar{b}(t) \tag{10}$$

con $A(t)$ dada por (3), y

$$\bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

a fin de, supuesta conocida la solución general de la ecuación homogénea asociada (2), aplicar el método de variación de las constantes descrito en el apartado 2.4. Obsérvese que, mediante ese paso al sistema equivalente, vemos que para la ecuación (1) se tiene la misma «receta» práctica que para las ecuaciones de primer orden o los sistemas de ecuaciones de primer orden: la solución general de la ecuación no homogénea se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la no homogénea. Esto también se puede probar directamente sobre la ecuación (1), sin necesidad de pasar a su sistema equivalente: introduzcamos, como para las ecuaciones de primer orden, el *operador diferencial*

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t) \tag{12}$$

que actúa sobre las funciones continuas y con derivadas continuas hasta el orden n en el intervalo (α, ω) en la forma

$$Lu = \frac{d^n u}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{du}{dt} + a_n(t)u(t) \tag{13}$$

Con esta notación, la ecuación (1) se escribe en la forma

$$Lx = b(t) \tag{14}$$

L es un operador lineal, o sea, $L(k_1u_1 + k_2u_2) = k_1Lu_1 + k_2u_2$, siendo k_1, k_2 dos números reales, como se comprueba inmediatamente. Esto implica que las soluciones de la ecuación homogénea

$$Lx = 0 \tag{15}$$

forman un espacio vectorial. Y si $x_p(t)$ es una determinada solución de (14), se comprueba, exactamente como en el caso de las ecuaciones de primer orden, que $x(t)$ es solución de (14) si y sólo si es de la forma

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

donde $x_0(t)$ es una cierta solución de la ecuación homogénea (15). Si sabemos encontrar por algún medio simple *una* solución particular de la ecuación (1), no será necesario pasar al sistema equivalente a fin de aplicar el método de variación de las constantes, que, como se ha visto, es completamente general pero, en ocasiones, puede conducir a cálculos complicados. En el apartado 4.4 veremos que, para una cierta clase de ecuaciones lineales con coeficientes $a_j(t)$ constantes, existe un método alternativo al de variación de las constantes para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea.

PROBLEMAS

1. Obtener por el método de Picard la expresión en serie de la solución del problema de valor inicial

$$x'' + x = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 1$$

[NOTA. Se obtiene la serie de Taylor de sen t, y la de cos t para $x'(t)$.]

2. *(Generalización da la desigualdad de Gronwall).* Sean u y v dos funciones reales continuas y no negativas en $[t_0, b]$. Probar que si

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds \quad , \quad t \in [t_0, b]$$

con $C \geqslant 0$, entonces

$$u(t) \leqslant C \exp\left[\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right] \quad , \quad t \in [t_0, b]$$

3. Se ha visto en la proposición 1 del apartado 2.3 que para que n funciones $\phi^1(t)$,

..., $\phi^n(t)$ con derivadas primeras continuas en $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ formen una base el espacio de soluciones de $x' = A(t)x$ es *necesario* que $\det \Phi(t) \neq 0$ *para todo* $t \in (\alpha, \omega)$, siendo $\Phi(t)$ la matriz que tiene por columnas $\phi^1(t)$, ..., $\phi^n(t)$. Pruébese que esa condición también es *suficiente*, o sea, que si $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \omega)$, existe un único sistema $x' = A(t)x$ del cual $\phi^1(t)$, ..., $\phi^n(t)$ forman una base del espacio de soluciones.

4. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ y sea C una matriz constante no singular. Se ha visto en la proposición del apartado 2.3 que ΦC también es una matriz fundamental del sistema.

a) ¿Qué condición ha de cumplirse para que $C\Phi$ sea también una matriz fundamental de $x' = A(t)x$?

b) Determinar $B(t)$ tal que $C\Phi$ sea matriz fundamental de $x' = B(t)x$.

5. Sea $\Phi(t)$ una función matricial derivable en el intervalo (α, ω). Si $\Phi(t)$ es invertible para todo $t \in (\alpha, \omega)$, probar que

$$\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}] = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}$$

(*Indicación:* Utilícese la identidad $\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = I$.)

6. La ecuación

$$y' = -[A(t)]^T y \qquad (*)$$

(o bien, $y' = -yA(t)$, escrita en forma de vector fila) se dice que es la *ecuación adjunta* de

$$x' = A(t)x \qquad (**)$$

Probar que si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (**), entonces

$$[\Phi^{-1}(t)]^T$$

es una matriz fundamental de (*). (*Indicación:* véase problema 5.)

7. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t & 0 \\ -1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(*Indicación:* Obténgase primeramente una matriz fundamental de la ecuación homogénea.)

8.

a) ¿De qué forma ha de ser la función $a(t)$, $a: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, para que las funciones

$$\Phi^1(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi^3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

sean soluciones linealmente independientes de un sistema lineal de la forma $x' = A(t)x$, con $t > 0$, si ha de verificarse que

$$\text{traza } A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + a_{33}(t) = \frac{4}{t}?$$

b) Si la cuestión anterior tiene solución, escríbase el sistema (único) $x' = A(t)x$, $t > 0$, de que se trata.

c) Si, como antes, *a)* tiene solución, hállese la solución del PVI

$$x' = A(t)x + \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones, dada la solución particular que se indica:

a) $x'' - 5x' + 6x = 0 \quad ; \quad \varphi_1(t) = e^{2t}$.

b) $x'' - \frac{4}{t}x' + \frac{6}{t^2}x = 0 \quad ; \quad \varphi_1(t) = t^2 \quad , \quad t > 0$.

c) $x'' - \frac{1}{t(1-t^2)}x' = 0 \quad ; \quad t \in (0, 1) \quad ; \quad \varphi_1(t)$: por simple inspección.

10. Probar que las gráficas de dos soluciones distintas de una ecuación diferencial de segundo orden no pueden ser tangentes en ningún punto.

11. Probar que si una solución $\varphi(t)$ de una ecuación lineal de segundo orden tiene infinitos ceros en el intervalo $[a, b]$, con $\alpha < a < b < \omega$, entonces $\varphi(t) \equiv 0$ en (α, ω).

12. [Ejemplo de *análisis cualitativo:* se obtienen propiedades de funciones directamente a partir del estudio de la ecuación diferencial que satisfacen.]

Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0 \qquad (*)$$

Denotemos por $s(t)$ la solución (única) tal que

$$s(0) = 0 \quad , \quad s'(0) = 1$$

y por $c(t)$ la solución tal que

$$c(0) = 1 \quad , \quad c'(0) = 0$$

Probar a partir de la ecuación y de los resultados generales del capítulo las siguientes afirmaciones:

a) Las funciones $s(t)$ y $c(t)$, como toda solución de (*), están definidas y son infinitamente derivables en $(-\infty, \infty)$.

b) $s'(t) = c(t) \quad , \quad c'(t) = -s(t)$.

c) $s(t)^2 + c(t)^2 = 1$.

d) El determinante wronskiano de $s(t)$ y $c(t)$ vale -1.

e) $s(t \pm a) = s(t)c(a) \pm c(t)s(a)$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

f) $c(t \pm a) = c(t)c(a) \pm s(t)s(a)$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

g) Existe un número real positivo mínimo α tal que $c(\alpha) = 0$. («Se define» $\alpha = \pi/2$.)

h) $s(t + 2\pi) = s(t) \quad , \quad c(t + 2\pi) = c(t)$.

(NOTA. Naturalmente, $s(t) \equiv \operatorname{sen} t$ y $c(t) \equiv \cos t$.)

3 Sistemas lineales con coeficientes constantes I: matrices diagonalizables

La forma general de un sistema lineal con coeficientes constantes es:

$$x' = Ax + b(t) \tag{1}$$

siendo $A = (a_{ij})$ una matriz de constantes y $b(t)$ una función continua en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si se logra resolver el sistema homogéneo asociado

$$x' = Ax \tag{2}$$

entonces, mediante el método de variación de las constantes (véase apartado 2.4), se tendrá resuelto el sistema no homogéneo $x' = Ax + b(t)$.

En este capítulo vamos a resolver de manera explícita el sistema homogéneo (2), es decir, a dar un método para construir explícitamente sus soluciones, para distintas clases de matrices A. En el capítulo 5 estudiaremos el sistema $x' = Ax$ en toda su generalidad.

3.1. Autovalores reales distintos. Matrices simétricas

Como sabemos, el conjunto de soluciones de $x' = Ax$ forma un espacio vectorial de dimensión n. Por tanto, resolver $x' = Ax$ equivale a encontrar n de sus soluciones que sean linealmente independientes[1].

Con dicho objetivo, e inspirándose en lo que vimos para la ecuación escalar $x' = ax$, cuyas soluciones eran de la forma $e^{at}c$, con $c \in \mathbb{R}$, probamos con funciones del tipo

$$x(t) = e^{\lambda t}v$$

con $v \in \mathbb{R}^n$ constante y $\lambda \in \mathbb{R}$, como posibles soluciones de $x' = Ax$. Habrá de ser:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = \left(\frac{de^{\lambda t}}{dt}\right)v = \lambda e^{\lambda t}v = A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av$$

[1] O, lo que es lo mismo, una matriz fundamental del sistema.

lo que es equivalente, teniendo en cuenta que $e^{\lambda t} \neq 0$, a

$$Av = \lambda v \tag{3}$$

es decir,

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{4}$$

Reconocemos en (3) ó (4) la ecuación que define a los *autovalores* λ y sus correspondientes *autovectores* $v \in \mathbb{R}^n$ de la matriz A. (Véase apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor.) Los autovectores de A dan las *direcciones invariantes* por la transformación definida por A. De acuerdo con (4), los autovalores de A son las raíces reales de la *ecuación característica*

$$\det (A - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

Algunas de las n soluciones de esta ecuación pueden ser complejas (en cuyo caso aparecerán en pares conjugados) y aunque, en principio, la ecuación (3) no tiene sentido para ellas (A es una matriz de elementos reales y $v \in \mathbb{R}^n$), se las denominará también autovalores (complejos) de la matriz A. En el apartado 3.2 daremos una interpretación geométrica de los autovalores complejos extendiendo la validez de la ecuación (3).

Volviendo a nuestro objetivo, vemos que, para cada autovalor (real) λ_j, tendremos una solución

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j \tag{6}$$

de (2), donde v^j es un autovector correspondiente a λ_j. *Si la matriz A tiene n autovectores linealmente independientes* $v^1, \ldots, v^n$, correspondientes, respectivamente, a los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos), entonces, esas funciones $x^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, dadas en (6) constituyen una base del espacio de soluciones del sistema (2), teniendo en cuenta que, como veíamos en el apartado 2.1, a n vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, tomados como valores iniciales, corresponden soluciones del sistema linealmente independientes. En consecuencia, la *solución general* de (2) estaría dada, en esta situación, por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v^n \tag{7}$$

siendo $c_1, \ldots, c_n$ números reales cualesquiera. Podemos escribir (7) en forma matricial:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{bmatrix} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} v_1^n \\ \vdots \\ v_n^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_n^1 & \cdots & v_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} c \tag{8}$$

donde P es la matriz cuyas columnas son los autovectores $v^1, \ldots, v^n$, y c es el vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Si nos proponemos resolver el PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{9}$$

el vector de constantes c quedará univocamente determinado imponiendo en (8) que $x(0) = x^0$:

$$x(0) = PIc = Pc$$

de donde

$$c = P^{-1}x^0$$

(P es una matriz no singular, pues sus columnas son los autovectores $v^1, \ldots, v^n$, que, según se está suponiendo, son linealmente independientes.) Por tanto, la solución del problema (9) está dada por

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}x^0 \tag{10}$$

A las expresiones (8) y (9) podemos llegar adoptando un punto de vista inicial distinto. Dado el sistema

$$x' = Ax$$

intentamos simplificar su resolución realizando un *cambio de variables lineal:*

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + \cdots + p_{1n}y_n \\ x_2 = p_{21}y_1 + \cdots + p_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_{n1}y_1 + \cdots + p_{nn}y_n \end{cases} \tag{11}$$

o, en forma matricial,

$$x = Py \quad , \quad P = (p_{ij}) \tag{11'}$$

Naturalmente, ha de corresponder a cada n-upla $(x_1, ..., x_n)$ una única n-upla $(y_1, ..., y_n)$, y viceversa; es decir, P ha de ser una matriz no singular. Equivalentemente, las columnas $p^1, ..., p^n$ de P han de ser vectores linealmente independientes. De (11) se tiene

$$x = y_1 p^1 + \cdots + y_n p^n \tag{12}$$

o sea, $y_1, ..., y_n$ son las coordenadas respecto a la base $\{p^1, ..., p^n\}$ del punto x de $\mathbb{R}^n$ (de coordenadas $x_1, ..., x_n$ respecto a la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$, donde $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, con el 1 en la posición j-ésima, $j = 1, ..., n$).

Si

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

es una función derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, es claro, a la vista de (11), que

$$x'(t) = Py'(t)$$

Cambiando entonces las variables en la ecuación $x' = Ax$, se tendrá en la nueva función incógnita $y(t)$:

$$Py' = APy$$

es decir,

$$y' = P^{-1}APy \tag{13}$$

Las ecuaciones (2) y (13) son equivalentes en el sentido de que a cada solución $x(t)$ de (2) le corresponde una y sólo una solución $y(t)$ de (13) (la función $y(t) = P^{-1}x(t)$) y recíprocamente. La ecuación (13) será más fácil de resolver que su equivalente la ecuación (2) si la matriz $B = P^{-1}AP$ es más simple que la matriz A. Dos matrices A y B que están en la relación $B = P^{-1}AP$ se dice que son *semejantes* (llamándose «matriz de paso» a la matriz no singular P). La situación más favorable se presentará cuando la matriz A sea semejante a una *matriz diagonal*

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix}$$

(y se dice entonces que la matriz A es *diagonalizable*).

En efecto, el sistema (13) toma entonces la forma

$$\begin{cases} y_1' = b_1 y_1 \\ y_2' = b_2 y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = b_n y_n \end{cases} \tag{14}$$

es decir, se tratará de un sistema de *ecuaciones desacopladas:* cada una de las ecuaciones es simplemente una ecuación escalar en la correspondiente variable y_j, ecuación que ya sabemos integrar:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{b_1 t} c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) = e^{b_n t} c_n \end{cases} \tag{15}$$

o, en forma matricial:

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{b_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{b_n t} \end{bmatrix} c \tag{15'}$$

con $c \in \mathbb{R}^n$ cualquiera.

Deshaciendo el cambio de variables, se tendrá para la solución general de la ecuación (2):

$$x(t) = Py(t) = P \begin{bmatrix} e^{b_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{b_n t} \end{bmatrix} c \quad , \quad c \in \mathbb{R}^n \tag{16}$$

y para la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{b_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{b_n t} \end{bmatrix} P^{-1} x^0 \tag{17}$$

(teniendo en cuenta que $c = y(0) = P^{-1}x(0)$ [2]).

Pero si la matriz A es semejante a la matriz $B = \text{diag}\,\{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces, necesariamente, los números $b_1, \ldots, b_n$ son los autovalores de A. En efecto, dos matrices semejantes tienen, como se sabe, los mismos autovalores, ya que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \\ = \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P = \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

es decir, las ecuaciones características de A y B son las mismas, y sus raíces serán los autovalores comunes a ambas matrices. Pero es evidente que los autovalores de

[2] Obsérvese que $Pe^{Bt}P^{-1}$, donde e^{Bt} denota la matriz diagonal $\text{diag}\,\{e^{b_1 t}, \ldots, e^{b_n t}\}$, es la matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema $x' = Ax$ que satisface $\Phi(0) = I$.

B son los números $b_1, ..., b_n$. Vemos, pues, que las fórmulas (16) y (17) coinciden con (8) y (10). La razón de ello estriba en el siguiente resultado algebraico:

Teorema 1. *Si A tiene n autovectores linealmente independientes $v^1, ..., v^n$, correspondientes a los autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, y se forma la matriz*

$$P = \begin{bmatrix} | & & | \\ v^1 & \cdots & v^n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

entonces, $B = P^{-1}AP = \text{diag}\,\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Recíprocamente, si A es diagonalizable, entonces A posee n autovectores linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN. Efectuando cálculos se tiene

$$AP = A\begin{bmatrix} | & & | \\ v^1 & \cdots & v^n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ Av^1 & \cdots & Av^n \\ | & & | \end{bmatrix} \overset{\text{def. de autovector}}{=\!=}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v^1 & \cdots & \lambda_n v^n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v^1 & \cdots & v^n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = PB$$

O sea, $B = P^{-1}AP$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Recíprocamente, si A es diagonalizable, ello quiere decir que existe una matriz P no singular tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(los elementos de la diagonal de la matriz diagonal semejante a A han de ser, como vimos, los autovalores de A), es decir,

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

O sea,

$$A\begin{bmatrix} | & & | \\ p^1 & \cdots & p^n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ p^1 & \cdots & p^n \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

denotando por $p^1, \ldots, p^n$ las columnas de la matriz de paso P. Como antes,

$$A\begin{bmatrix} | & & | \\ p^1 & \cdots & p^n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ Ap^1 & \cdots & Ap^n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ p^1 & \cdots & p^n \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_n p^1 & \cdots & \lambda_n p^n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

y si ambas matrices son iguales, tienen iguales sus columnas, es decir,

$$Ap^j = \lambda_j p^j \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

lo que significa que p^j es autovector de A correspondiente al autovalor λ_j.

3.1.1. Autovalores reales distintos

Son pues equivalentes, para una matriz A $(n \times n)$, las propiedades de «ser diagonalizable» y «poseer n autovectores linealmente independientes». Se plantea entonces la cuestión de encontrar condiciones bajo las cuales se puedan afirmar esas propiedades para la matriz A. La situación más simple se da cuando A tiene n autovalores reales distintos, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 2. *Cualquier conjunto de m autovectores $v^1, \ldots, v^m$ de A, correspondientes, respectivamente, a autovalores reales distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción sobre el número m de vectores. Para $m = 1$ el teorema es cierto (recuérdese que en la definición de autovector está incluido el que ha de ser un vector no nulo). Supongámoslo cierto para $m = k$, es decir, que cualquier conjunto de k autovectores correspondientes a autovalores distintos es linealmente independiente. Hay que probar que lo mismo ocurre para cualquier conjunto de $k + 1$ autovectores $v^1, \ldots, v^{k+1}$ correspondientes, respectivamente, a autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$. Aplicando A a los dos miembros de la ecuación

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \cdots + c_{k+1} v^{k+1} = 0 \tag{18}$$

se tiene

$$c_1\lambda_1 v^1 + c_2\lambda_2 v^2 + \cdots + c_{k+1}\lambda_{k+1}v^{k+1} = 0 \tag{19}$$

Multiplicando (18) por λ_1 y restando la ecuación resultante de (19) obtenemos

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v^2 + \cdots + c_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_1)v^{k+1} = 0 \tag{20}$$

Por la hipótesis de inducción, v^2, ..., v^{k+1} son vectores linealmente independientes, y como los números λ_1, λ_2, ..., λ_{k+1} son distintos, se deduce de (20) que

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_{k+1} = 0$$

lo que, junto con (18), implica que también $c_1 = 0$. En consecuencia, los vectores v^1, ..., v^{k+1} son linealmente independientes.

Así pues, si A tiene n autovalores distintos, λ_1, ..., λ_n, y sabemos calcularlos, se puede determinar explícitamente tanto la solución general de $x' = Ax$ como la solución del problema de valor inicial asociado.

EJEMPLO. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = \ x_2 - x_3 \\ x_2' = -3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \tag{21}$$

Su resolución explícita depende del conocimiento de los autovalores de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -3 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

obtenemos como autovalores

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$$

Hemos de determinar un autovector correspondiente a cada uno de los autovalores. Los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 1$ son las soluciones del sistema

$$(A - 1 \cdot I)x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una solución es $v^1 = (1, 1, 0)$. De manera análoga se obtienen $v^2 = (1, 1, -1)$, autovector correspondiente a $\lambda_2 = 2$, y $v^3 = (0, -1, -1)$, autovector correspondiente a $\lambda_3 = 3$. La solución general del sistema (21) será, por tanto, de acuerdo con (7) y (8):

$$x(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

O sea,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \\ x_3(t) = \quad - c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \end{cases} \tag{23}$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes reales arbitrarias. Si se desea expresar de manera general cómo la solución de (21) depende de la condición inicial $x(0) = x^0$, será necesario calcular la matriz inversa de la matriz P cuyas columnas son los autovectores v^1, v^2 y v^3. En este caso

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la solución del sistema (21) que satisface la condición inicial $x(0) = x^0$ es, de acuerdo con (10),

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

Si lo que se desea es determinar la solución correspondiente a una condición

inicial concreta, es más cómodo «imponer» la condición inicial dada en la expresión (22) ó (23) para determinar los correspondientes valores (únicos) de las constantes c_1, c_2 y c_3, ahorrándose así el trabajo de invertir la matriz P. Por ejemplo, si se trata de determinar la solución de (21) tal que $x(0) = (1, 1, 1)$ de (23) se tiene que:

$$\begin{cases} x_1(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ x_2(t) = c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ x_3(t) = -c_2 - c_3 = 1 \end{cases}$$

de donde $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ y $c_3 = 0$. Por tanto, la solución pedida será:

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^t - e^{2t} \\ x_2(t) = 2e^t - e^{2t} \\ x_3(t) = e^{2t} \end{cases}$$

3.1.2. Matrices simétricas

No todas las matrices reales con autovalores reales poseen n autovectores linealmente independientes, es decir, *no todas las matrices son diagonalizables.* Consideremos, por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Sus autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. Si A fuese diagonalizable, existiría una matriz no singular P tal que

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI$$

Pero entonces habría de ser

$$A = PBP^{-1} = P(aI)P^{-1} = (aI)PP^{-1} = aI = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Esta contradicción prueba que no existe una matriz P tal que

$$P^{-1}AP = \text{diag}\,\{a, a\}$$

es decir, que A no es diagonalizable.

Los autovectores de esa matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

han de satisfacer

$$(A - aI)x = 0$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo que son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Vemos que aunque $\lambda = a$ es un autovalor doble —su *multiplicidad algebraica es* 2— el espacio vectorial de sus autovectores —su *autoespacio* o *espacio propio*— es de dimensión 1, es decir, la *multiplicidad geométrica* del autovalor es 1, y no se puede contruir mediante autovectores la matriz de paso P.

Hay matrices con autovalores repetidos que se pueden diagonalizar (por ejemplo, las que son múltiplos de la identidad, aI, que son ya diagonales). El criterio para determinarlo no es otro, en principio, que calcular sus autovectores y comprobar si hay suficientes para formar una base de $\mathbb{R}^n$, lo que requiere que a cada autovalor le correspondan tantos autovectores linealmente independientes cuantas veces aparezca como raíz de la ecuación característica, es decir, que la multiplicidad geométrica del autovalor sea igual a su multiplicidad algebraica. (La teoría de formas canónicas de matrices proporciona criterios indirectos para comprobar esa condición. Véase el capítulo 5.)

Una clase de matrices que son diagonalizables, aparte de la ya considerada de matrices con autovalores reales distintos, es la de las matrices *simétricas*. Se puede probar (véase el apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor) que los autovalores de una matriz simétrica $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} = a_{ji}$, son todos reales y que para cada uno de ellos se puede encontrar un número de autovectores linealmente independientes (multiplicidad geométrica del autovalor) igual al de veces que aparece como raíz de la ecuación característica (multiplicidad algebraica).

EJEMPLO. Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Los autovalores de la matriz A de coeficientes son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y $\lambda_3 = -1$. Los autovectores correspondientes al autovalor doble 1 son las soluciones del sistema

$$(A - 1 \cdot I)x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que existen dos soluciones linealmente independientes; tomamos, por ejemplo,

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el autovalor $\lambda_3 = -1$, existe un solo autovector linealmente independiente. Podemos tomar

$$v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la solución general del sistema es

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & & \\ & e^t & \\ & & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

o, expresada en coordenadas,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + c_3 e^{-t} \\ x_2(t) = c_1 e^t - c_3 e^{-t} \\ x_3(t) = c_2 e^t \end{cases}$$

siendo c_1, c_2 y c_3 constantes reales arbitrarias.

Así pues, para resolver $x' = Ax$, siendo A una matriz simétrica, se calculan los autovalores y para cada uno de ellos se determinan tantos autovectores linealmente independientes como indica su multiplicidad algebraica. Se obtienen así n autovectores de A linealmente independientes que se toman como columnas para formar la matriz de paso P, resolviéndose $x' = Ax$ como en el caso de autovalores reales distintos; que ello es factible está garantizado por los resultados sobre matrices simétricas que se prueban en el apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor.

Los resultados de este apartado se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea A una matriz diagonalizable (en particular, con n autovalores distintos o simétrica) que tiene por autovalores los números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leqslant n$. Las soluciones $x(t)$ de la ecuación $x' = Ax$ tienen por coordenadas funciones de la forma*

$$x_i(t) = c_{i1}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{ir}e^{\lambda_r t} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{24}$$

para unas ciertas constantes $c_{i1}, \ldots, c_{ir}$ que quedan unívocamente determinadas si se prescribe una condición inicial $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$.

De este resultado se derivan inmediatamente interesantes propiedades cualitativas de las soluciones de la ecuación. Por ejemplo, es evidente que *las soluciones de $x' = Ax$ son funciones con derivadas continuas de cualquier orden.* Sin necesidad de explicitar todos los cálculos, del mero conocimiento de los autovalores de A, vemos que si todos ellos son negativos se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

para toda solución $x(t)$, y recíprocamente (véanse los problemas 4, 5 y 6. En el capítulo 6 se tratarán con detalle estas cuestiones).

La fórmula (24) permite desarrollar un «método de coeficientes indeterminados» para encontrar explícitamente las soluciones de $x' = Ax$. La idea consiste en proponer funciones de la forma (24) como soluciones de la ecuación, considerando los coeficientes c_{ij} como incógnitas. Al obligar a que tales funciones satisfagan $x' = Ax$ se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en los c_{ij} que, según garantizan los argumentos desarrollados a lo largo de este apartado, siempre se podrá resolver en términos de n constantes arbitrarias independientes. Consideremos como ilustración los dos sistemas resueltos anteriormente.

Sea el sistema (21)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = -3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Los autovalores eran $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, con lo que las soluciones habrán de ser de la forma

$$\begin{cases} x_1(t) = c_{11}e^t + c_{12}e^{2t} + c_{13}e^{3t} \\ x_2(t) = c_{21}e^t + c_{22}e^{2t} + c_{23}e^{3t} \\ x_3(t) = c_{31}e^t + c_{32}e^{2t} + c_{33}e^{3t} \end{cases} \tag{25}$$

Sustituyendo (25) en (21) e igualando los coeficientes de las correspondientes

exponenciales (las funciones e^t, e^{2t} y e^{3t}, definidas en todo $\mathbb{R}$, son linealmente independientes) se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_{11} - c_{21} + c_{31} = 0 \\ 3c_{11} - 3c_{21} + c_{31} = 0 \\ c_{11} - c_{21} - c_{31} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_{12} - c_{22} + c_{32} = 0 \\ 3c_{12} - 2c_{22} + c_{32} = 0 \\ c_{12} - c_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3c_{13} - c_{23} + c_{33} = 0 \\ 3c_{13} - c_{23} + c_{33} = 0 \\ c_{13} - c_{23} + c_{33} = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} c_{11} \text{ arbitraria} \\ c_{21} = c_{11} \\ c_{31} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_{12} \text{ arbitraria} \\ c_{22} = c_{12} \\ c_{32} = -c_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} c_{13} = 0 \\ c_{23} \text{ arbitraria} \\ c_{33} = c_{23} \end{cases}$$

La solución general será, por tanto,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_{11}e^t + c_{12}e^{2t} \\ x_2(t) = c_{11}e^t + c_{12}e^{2t} + c_{23}e^{3t} \\ x_3(t) = -c_{12}e^{2t} + c_{23}e^{3t} \end{cases} \tag{26}$$

que, como vemos, coincide con (23). Si se prescribe una condición inicial $x(0) = x^0$, se sustituye ésta en (26) y quedará un sistema algebraico que determina unívocamente las constantes c_{11}, c_{12} y c_{23}.

Sea ahora el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{27}$$

Los autovalores eran $\lambda = 1$ doble y $\lambda = -1$. Las soluciones serán, por tanto, de la forma

$$\begin{cases} x_1(t) = c_{11}e^t + c_{12}e^{-t} \\ x_2(t) = c_{21}e^t + c_{22}e^{-t} \\ x_3(t) = c_{31}e^t + c_{32}e^{-t} \end{cases} \tag{28}$$

Sustituyendo (28) en (27), como antes, se tiene un sistema de ecuaciones en los coeficientes c_{ij} que tiene por soluciones

$$\begin{cases} c_{11} \text{ arbitraria} \\ c_{21} = c_{11} \\ c_{31} \text{ arbitraria} \end{cases} \quad \begin{cases} c_{12} \text{ arbitraria} \\ c_{22} = -c_{12} \\ c_{32} = 0 \end{cases}$$

con lo que la solución general del sistema (27) será

$$\begin{cases} x_1(t) = c_{11}e^t + c_{12}e^{-t} \\ x_2(t) = c_{11}e^t - c_{12}e^{-t} \\ x_3(t) = c_{31}e^t \end{cases}$$

que, como se ve, coincide con la obtenida anteriormente.

Este método de coeficientes indeterminados no es práctico para dimensiones n altas. Quizá su utilidad esté limitada al caso $n = 2$ o a sistemas de mayores dimensiones con matrices A extraordinariamente simples. En general, es más ventajoso determinar los autovectores de la matriz A, construir la matriz de paso P que los tiene por columnas y aplicar las fórmulas (8) y (10), respectivamente, para la solución general de la ecuación y para la solución del problema de valor inicial.

3.2. Autovalores complejos

Aun siendo la matriz $A = (a_{ij})$ de elementos reales, sus autovalores pueden ser complejos, como ocurre con la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$. Interesa, naturalmente, considerar también esta posibilidad, y a este fin, conviene disponer para los autovalores complejos de la noción geométrica de autovector, noción que, como hemos visto, juega un papel clave en la construcción de una base del espacio de soluciones de la ecuación $x' = Ax$.

Para ello, se extiende A, contemplada como aplicación lineal que transforma el vector $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ en el vector $Ax \in \mathbb{R}^n$, a una aplicación que actúa sobre *vectores complejos*. El espacio $\mathbb{C}^n$ de vectores complejos es simplemente el conjunto de n-uplas de números complejos

$$z = (z_1, ..., z_n)$$

con $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, ..., n)$, siendo $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e i la unidad imaginaria.

Dos vectores z y w de $\mathbb{C}^n$ se suman, como los vectores de $\mathbb{R}^n$, componente a componente, pero ahora la multiplicación por escalares se realiza con números complejos:

$$\lambda z = (\lambda z_1, ..., \lambda z_n) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}^n$ queda así estructurado como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n. $\mathbb{R}^n$ es claramente un subconjunto de $\mathbb{C}^n$, pero *no* es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ ya que, al multiplicar un vector de $\mathbb{R}^n$ por escalares complejos no reales, el vector resultante tendrá componentes no reales (aunque la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ sí

que es un vector de $\mathbb{R}^n$). A efectos prácticos, y de modo análogo a la relación existente entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$, lo anterior se traduce en que, en tanto que espacio vectorial (suma de vectores, multiplicación de vectores por escalares complejos, suma y multiplicación de matrices), se trabaja en $\mathbb{C}^n$ exactamente igual que en $\mathbb{R}^n$, teniendo presente que cuando en una operación se tiene como resultado i^2 hemos de sustituirlo por el valor [3] -1.

Una matriz $n \times n \cdot A$ cuyos elementos sean números complejos define una aplicación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ operando sobre vectores complejos del mismo modo que las matrices reales lo hacen sobre vectores de $\mathbb{R}^n$, como se ha dicho antes a propósito de la manera de «trabajar» en $\mathbb{C}^n$ en tanto que espacio vectorial (y, recíprocamente, toda aplicación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ viene representada por una cierta matriz de elementos complejos, fijada una base en $\mathbb{C}^n$. Véase el apéndice 2 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor). Las definiciones de autovector y autovalor para estas matrices son las mismas que para las matrices reales: Un vector $v \in \mathbb{C}^n$ no nulo se dice que es *autovector* de A si existe un número complejo λ tal que $Av = \lambda v$; el número λ es el *autovalor* asociado a v y los autovalores de A son las n raíces de la *ecuación característica*

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

ecuación que, en general, tendrá coeficientes complejos y que, como sabemos, tiene n raíces, reales o complejas. Ahora cobra sentido la ecuación $Av = \lambda v$ cualquiera que sea la raíz, real o compleja, de dicha ecuación característica. Si A es una matriz de elementos reales (que es el caso que aquí nos interesa), la podemos considerar como un caso particular de matriz de elementos complejos y define, por tanto, una aplicación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Esta aplicación lineal es una *extensión* de la aplicación lineal que A define de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$: si

$$z = (z_1, ..., z_n) = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) =$$
$$= (x_1, ..., x_n) + i(y_1, ..., y_n) = x + iy$$
$$(x = \text{Re } z \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad y = \text{Im } z \in \mathbb{R}^n)$$

entonces, por la linealidad de A, se tiene

$$Az = Ax + iAy$$

---

[3] Lo que sí hay que cambiar es la noción de longitud o norma euclídea de un vector (véase apéndice 3). Si aplicásemos la de $\mathbb{R}^n$, $|x|_2^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, al vector $(1, i) \in \mathbb{C}^2$, se tendría una longitud $(1^2 + i^2)^{1/2} = 0$. Ahora, lo natural es tomar $|z_j|^2$, el módulo al cuadrado, en lugar de $x_j^2 = |x_j|^2$. Así, $|z|_2^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. El producto escalar asociado a esta norma vendrá dado por

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_n \overline{w}_n$$

teniéndose como en el caso real que $\langle z, z \rangle = |z|_2^2$.

Este producto escalar verifica las propiedades siguientes:

a) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$;

b) $\langle z, w + r \rangle = \langle z, w \rangle + \langle z, r \rangle$;

c) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$ ($= \langle z, \overline{\lambda} w \rangle$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;

d) $\langle z, z \rangle > 0$ para todo $z \neq 0$ y $\langle z, z \rangle = 0$ para $z = 0$.

de modo que si, en particular, $z \in \mathbb{R}^n$, se tiene $y = \operatorname{Im} z = (0, ..., 0)$ y $Az \in \mathbb{R}^n$. En términos prácticos, A actúa sobre vectores complejos exactamente igual que sobre los vectores de $\mathbb{R}^n$, considerando a i, la unidad imaginaria, como un escalar.

Nótese que, si A es una matriz real, se verifica que $Av = \lambda v$ si, y sólo si, $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ (tomando conjugados en ambos miembros; el conjugado del vector $z = (z_1, ..., z_n)$ es el vector $\bar{z} = (\bar{z}_1, ..., \bar{z}_n)$), con lo que λ es autovalor si, y sólo si, lo es $\bar{\lambda}$ (correspondiéndoles autovectores conjugados.)

Se puede también extender la noción de solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$, con A una matriz real, a funciones vectoriales con valores complejos (de la variable real t). Si $z(t)$ es una de estas funciones, será de la forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, siendo $x(t)$ e $y(t)$ funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ que se denominan, respectivamente, *parte real* y *parte imaginaria* de $z(t)$. Las derivadas $z'_j(t)$, $j = 1, ..., n$, se definen lo mismo que para las funciones reales (el límite del cociente incremental que las define se calcula en $\mathbb{C}$) y se tendrá

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

$z(t)$ será solución de la ecuación diferencial si

$$z'(t) = Az(t)$$

(extendida A a $\mathbb{C}^n$). Se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1. *$z(t)$ es solución de $x' = Ax$ si, y sólo si,* Re z *e* Im z *son soluciones de $x' = Ax$.*

En efecto, si $z'(t) = Az(t)$, entonces

$$x'(t) + iy'(t) = A(x(t) + iy(t)) = Ax(t) + iAy(t)$$

Igualando partes real e imaginaria se obtiene:

$$x'(t) = Ax(t) \quad , \quad y'(t) = Ay(t)$$

es decir, $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones de la ecuación, siendo también inmediato el recíproco.

Supongamos que $\lambda = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) es un autovalor complejo de la matriz A. Entonces, de modo análogo a lo que veíamos al comienzo del apartado 3.1, las funciones

$$w(t) = e^{\lambda t}w = e^{(a+ib)t}(u + iv)$$
$$\bar{w}(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{w} = e^{(a-ib)t}(u - iv)$$

donde $w = u + iv$ es un autovector correspondiente a λ, son dos soluciones con valores complejos de la ecuación $x' = Ax$ ($\bar{\lambda}$ es también autovalor y $\bar{w}$ es un

autovector correspondiente a $\bar{\lambda}$) linealmente independientes (pues $\bar{\lambda} \neq \lambda$ y el teorema 2 del apartado 3.1 es, claramente, válido también en $\mathbf{C}^n$).

Pero

$$w(t) = e^{(a+ib)t}(u + iv) = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)(u + iv) = u(t) + iv(t)$$

siendo

$$u(t) = \operatorname{Re} w(t) = e^{at}(u \cos bt - v \operatorname{sen} bt)$$

$$v(t) = \operatorname{Im} w(t) = e^{at}(u \operatorname{sen} bt + v \cos bt)$$

Las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones (reales) de la ecuación $x' = Ax$, de acuerdo a la proposición anterior. Además, son linealmente independientes, ya que

$$u(t) = \operatorname{Re} w(t) = \frac{1}{2}[w(t) + \bar{w}(t)]$$

$$v(t) = \operatorname{Im} w(t) = \frac{1}{2i}[w(t) + \bar{w}(t)]$$

con lo que una combinación lineal entre $u(t)$ y $v(t)$ implicaría una combinación lineal entre $w(t)$ y $\bar{w}(t)$.

De este modo, para el caso $n = 2$ se tiene ya una base del espacio de soluciones (reales) de la ecuación $x' = Ax$, cuando los autovalores de A son los números complejos $a \pm ib$, formada por $u(t) = \operatorname{Re} w(t)$ y $v(t) = \operatorname{Im} w(t)$. La *solución general* será:

$$\begin{aligned} x(t) = {} & K_1 e^{at}\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cos bt - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \operatorname{sen} bt\right] + \\ & + K_2 e^{at}\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \operatorname{sen} bt + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cos bt\right] \end{aligned} \tag{1}$$

EJEMPLO. Hallar la solución general del sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} x$$

Los autovalores de la matriz A son $1 \pm 2i$. Obtengamos un autovector correspondiente a $1 + 2i$:

$$\begin{bmatrix} 3 - (1 + 2i) & 2 \\ -4 & -1 - (1 + 2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$(1 - i)w_1 + w_2 = 0$$

Tomemos $w_1 = 1$, lo que da $w_2 = -1 + i$. Por tanto:

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la solución general es

$$x(t) = K_1 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] +$$

$$+ K_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t \right]$$

En forma matricial, la fórmula (1) es

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

La fórmula (2) se puede obtener también abordando la resolución de la ecuación $x' = Ax$ por medio de un cambio de variables, de modo análogo a lo visto en el apartado 3.1. Se trata de realizar un cambio de variables $x = Py$, de modo que la ecuación transformada, $y' = By$, con $B = P^{-1}AP$, sea más simple que la ecuación original. En vista de la expresión (2) y teniendo en cuenta lo desarrollado en el apartado 3.1 para el caso de autovalores reales, parece claro que la matriz de paso P apropiada ha de ser

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \operatorname{Re} w & \operatorname{Im} w \\ | & | \end{bmatrix} \tag{3}$$

siendo $w = u + iv$ un autovector del autovalor complejo $\lambda = a + ib$. Calculemos entonces la matriz $B = P^{-1}AP$. Esta ecuación es equivalente a $AP = PB$. Se tiene

$$A \begin{bmatrix} | & | \\ \operatorname{Re} w & \operatorname{Im} w \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ A\ (\operatorname{Re} w) & A\ (\operatorname{Im} w) \\ | & | \end{bmatrix}$$

La ecuación $Aw = \lambda w$ da

$$Aw = A(u + iv) = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av)$$

de donde

$$A\ (\text{Re}\ w) = au - bv \quad , \quad A\ (\text{Im}\ w) = bu + av$$

En consecuencia,

$$AP = \begin{bmatrix} | & | \\ au - bv & bu + av \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

y, por tanto,

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Independientemente de que para los argumentos precedentes nos hayamos apoyado en que ya conocemos la fórmula (2) que da las soluciones de la ecuación diferencial $x' = Ax$, hemos demostrado el resultado algebraico siguiente.

Proposición 2. *Sea A una matriz 2×2 con autovalores no reales λ, $\bar{\lambda}$, $\lambda = a + ib$. Si P es la matriz no singular* (3), *entonces*

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Vemos entonces que, aunque no es diagonalizable[4], A es semejante a una matriz relativamente simple definida en términos de sus autovalores, de manera análoga a lo que ocurre en el caso diagonalizable.

Haciendo el cambio de variables $x = Py$, con P dada por (3), llegamos al sistema

$$y' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} y \tag{4}$$

El sistema (4) se puede resolver por un camino algo diferente del que lleva a la fórmula (2) que está basado en la identificación usual de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ (mientras que antes, para llegar a (2), se «extendía» el sistema (4) a $\mathbb{C}^2$). Si ponemos $z = y_1 + iy_2$, es fácil ver que el sistema (4) es equivalente a la ecuación diferencial en $\mathbb{C}$

$$z' = \bar{\lambda} z \tag{5}$$

[4] Lo es, por supuesto, en el campo complejo, al tener dos autovalores distintos, λ y $\bar{\lambda}$; pero lo que nos interesa, en último término, es obtener las soluciones con valores reales de la ecuación $x' = Ax$.

en el sentido de que si $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$ es solución de (5), entonces la función $(y_1(t), y_2(t))$ es solución del sistema (4) y si $(y_1(t), y_2(t))$ es una solución de (4), entonces la función con valores complejos $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$ es solución de la ecuación diferencial (5). La ecuación (5) es la ecuación escalar lineal más simple en $\mathbb{C}$ y, con los mismos argumentos que en la introducción se daban para la ecuación en $\mathbb{R}$ $x' = ax$, se puede probar que su solución general es

$$z(t) = Ke^{\lambda t} \quad , \quad K \in \mathbb{C}$$

Si ahora escribimos $K = K_1 + iK_2$, se tendrá, tomando partes real e imaginaria, que

$$y_1(t) = K_1 e^{at} \cos bt + K_2 e^{at} \operatorname{sen} bt$$
$$y_2(t) = -K_1 e^{at} \operatorname{sen} bt + K_2 e^{at} \cos bt$$

o, en forma matricial,

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

En realidad, no es necesario justificar rigurosamente (integrando la ecuación compleja (5)) el razonamiento que nos ha llevado a la fórmula (6). Lo podemos considerar como un argumento heurístico, basado en la analogía formal de la ecuación (5) con la ecuación real $x' = ax$, que sí sabemos integrar, que nos lleva a la *conjetura* de que las funciones

$$y^1(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos & bt \\ -\operatorname{sen} & bt \end{bmatrix}, \quad y^2(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} & bt \\ \cos & bt \end{bmatrix}$$

forman una base del espacio de soluciones del sistema (4). Es inmediato comprobar directamente que, en efecto, son soluciones de (4), y son linealmente independientes, ya que:

$$\det \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} = e^{2at}(\operatorname{sen}^2 bt + \cos^2 bt) \neq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (véase proposición 1 del apartado 2.3).

Si, finalmente, deshacemos el cambio de variables, $x = Py$, tendremos que la solución general de la ecuación $x' = Ax$, siendo A una matriz 2×2 con autovalores complejos conjugados, vendrá dada por la fórmula (2) que ya habíamos obtenido por el primer método. Como veremos a continuación, la idea de realizar un cambio de variables permite abordar más cómodamente la resolución del caso general de dimensión n.

3.2.1. Matrices con autovalores distintos

Podemos ya resolver cualquier sistema lineal $x' = Ax$ dado por una matriz A que tenga autovalores *distintos*, sin que importe que éstos sean reales o complejos. Para fijar las ideas, supongamos que A es una matriz 3×3 que tiene por autovalores

$$\lambda,\ \mu = a + ib,\ \bar{\mu} = a - ib \quad (\lambda,\ a \text{ y } b \neq 0 \text{ números reales})$$

Calculamos un autovector de λ:

$$Av^1 = \lambda v^1$$

y un autovector (complejo) de μ:

$$Aw = \mu w, \quad w = v^2 + iv^3$$

Los vectores v^1, v^2 y v^3 son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, pues una ecuación de la forma

$$c_1v^1 + c_2v^2 + c_3v^3 = 0 \quad (c_j \in \mathbb{R})$$

conduce, teniendo en cuenta que

$$v^2 = \frac{(w + \bar{w})}{2} \quad , \quad v^3 = \frac{(w - \bar{w})}{2i}$$

a la ecuación en $\mathbb{C}^3$

$$c_1v^1 + \frac{1}{2}c_2(w + \bar{w}) + \frac{1}{2i}c_3(w - \bar{w}) = 0$$

O sea,

$$c_1v^1 + \frac{1}{2}(c_2 - ic_3)w + \frac{1}{2}(c_2 + ic_3)\bar{w} = 0$$

Pero como v^1, w y $\bar{w}$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}^3$, pues corresponden a autovalores distintos (el teorema 2 del apartado 3.1 es válido también en $\mathbb{C}^n$, como decíamos antes), habrá de ser

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 - ic_3 = 0 \quad , \quad c_2 + ic_3 = 0$$

es decir, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Formamos entonces la matriz

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

y se tendrá

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Av^1 & Av^2 & Av^3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda v^1 & av^2 - bv^3 & av^3 + bv^2 \\ | & | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & a & b \\ & -b & a \end{array}\right]$$

Es decir, la matriz A es semejante a la matriz

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & a & b \\ & -b & a \end{array}\right] = P^{-1}AP$$

Si hacemos el cambio de variables $x = Py$, la ecuación $x' = Ax$ se transformará en

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & a & b \\ & -b & a \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

sistema que se desacopla en

$$y_1' = \lambda y_1$$

$$\begin{bmatrix} y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ecuaciones de dimensiones 1 y 2 que ya sabemos resolver:

$$y_1(t) = e^{\lambda t}K_1$$

$$\begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$y(t) = \left[\begin{array}{c|cc} e^{\lambda t} & & \\ \hline & e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ & -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{array}\right]\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

y, en consecuencia,

$$x(t) = P(y(t)) = P\left[\begin{array}{c|cc} e^{\lambda t} & & \\ \hline & e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ & -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{array}\right]\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO. Resolver la ecuación $x' = Ax$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda = 1$, $\mu = 2 + 3i$, $\bar{\mu} = 2 - 3i$. Los autovectores correspondientes a $\lambda = 1$ son las soluciones del sistema

$$(A - 1 \cdot I)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Una solución es $v^1 = (10, 3, -19)$. Los autovectores correspondientes a μ están dados por

$$(A - (2 + 3i))w = \begin{bmatrix} -1 - 3i & 0 & 0 \\ -6 & 3i & -3 \\ 1 & 3 & -3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0$$

Tomemos $w = (0, 1, -i) = (0, 1, 0) + i(0, 0, -1) = v^2 + iv^3$. Entonces, la matriz P será

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y la solución general vendrá dada por

$$x(t) = P \left[\begin{array}{c|cc} e^t & & \\ \hline & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\operatorname{sen} 3t \\ & -e^{2t}\operatorname{sen} 3t & e^{2t}\cos 3t \end{array}\right] \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

De manera general, si la matriz A $n \times n$ tiene por autovalores los números distintos

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_s, \bar{\mu}_s$$

donde $\mu_k = a_k + ib_k$, λ_j, a_k, b_k son números reales y $r + 2s = n$, entonces, la matriz A es semejante a la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Como matriz de paso P se toma la matriz cuyas columnas son, sucesivamente, autovectores (reales) de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ y, a continuación, pares de columnas consistentes en las partes real e imaginaria de autovectores (complejos) de los autovalores no reales $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Esas n columnas son vectores linealmente independientes, por el mismo argumento que en el caso $n = 3$, resultando así P una matriz no singular; y, también como para $n = 3$, se ve que, efectivamente,

$$P^{-1}AP = B$$

Para resolver la ecuación $x' = Ax$ se efectúa, entonces, el cambio de variables $x = Py$, teniéndose en las nuevas variables la ecuación

$$y' = By \tag{8}$$

con B dada por (7). Esta ecuación se desacopla en ecuaciones de dimensiones 1 y 2 y, lo mismo que en el caso $n = 3$, su solución general estará dada por

$$y(t) = e^{Bt}K$$

donde K es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$ (obsérvese que $y(0) = K$) y

$$e^{Bt} \overset{\text{def}}{=} \tag{8}$$

$$B = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & & \\ & & & e^{a_1 t}\begin{bmatrix} \cos b_1 t & \operatorname{sen} b_1 t \\ -\operatorname{sen} b_1 t & \cos b_1 t \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{a_s t}\begin{bmatrix} \cos b_s t & \operatorname{sen} b_s t \\ -\operatorname{sen} b_s t & \cos b_s t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

La expresión e^{Bt} es aquí un mero símbolo para la matriz de la derecha, pero en el capítulo 5 le daremos un significado preciso.

Deshaciendo el cambio de variables, la solución general de $x' = Ax$ estará dada por

$$x(t) = Pe^{Bt}K \tag{9}$$

Si lo que tenemos planteado es el PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{10}$$

su solución estará dada por[5]

$$x(t) = Pe^{Bt}P^{-1}x_0$$

(Basta imponer la condición inicial en (9).)

EJEMPLO. Resolver $x' = Ax$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

[5] Obsérvese que, como en el caso de autovalores reales, $Pe^{Bt}P^{-1}$ es la matriz fundamental del sistema que satisface $\Phi(0) = I$.

Los autovalores de A son $1,\ \pm i,\ 2 \pm 3i$. Los autovectores correspondientes a $\lambda = 1$ son las soluciones de

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & 4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uno de ellos es

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los autovectores correspondientes a $\mu_1 = i$ satisfacen

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -3-i & 4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1-i & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2-i & 1 \\ -4 & 3 & -4 & -3 & 5-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo uno de ellos

$$w^1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos, por tanto

$$v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De modo análogo se ve que

$$w^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente a $\mu_2 = 2 + 3i$, por lo que tomaremos

$$v^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de paso es, pues,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^t & & \\ & \begin{matrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\operatorname{sen} 3t \\ -e^{2t}\operatorname{sen} 3t & e^{2t}\cos 3t \end{matrix} \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS

1. Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad b) \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} ; \quad c) \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 9 & 6 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 9 & 6 & -14 \end{bmatrix} \quad ; \quad e)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad f)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad h)\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Determinar la solución del problema de valor inicial $x' = Ax$, $x(0) = x^0$, siendo A la matriz de los casos *a*), *f*) y *g*) del problema anterior y la condición inicial, respectivamente, $x^0 = (1, 1)$, $x^0 = (1, 2, 3)$ y $x^0 = (1, 0, 1, 0)$.

3. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1' = -6x_1 + x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 + 3\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad x_1(0) = 1 \quad , \quad x_2(0) = 1$$

4.

a) Probar que si la matriz A $n \times n$ tiene un autovalor real $\lambda < 0$, entonces el sistema $x' = Ax$ tiene al menos una solución no trivial $x(t)$ tal que $\lim x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$.

b) Probar que si la matriz A $n \times n$ tiene un autovalor real $\lambda > 0$, entonces el sistema $x' = Ax$ tiene soluciones no acotadas.

c) Sea A una matriz no singular $n \times n$ con n impar. Entonces, el sistema $x' = Ax$ tiene soluciones no periódicas.

5. Probar que si la matriz A tiene n autovalores distintos, reales y/o complejos, o bien es simétrica, entonces

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

para toda solución de $x' = Ax$ si, y sólo si, Re $\lambda < 0$ para todo autovalor λ de A.

6. Sea A una matriz $n \times n$ con n autovalores distintos (o bien una matriz simétrica). Si $x(t)$ e $y(t)$ son las soluciones de $x' = Ax$ que satisfacen, respectivamente, $x(0) = x^0$ e $y(0) = y^0$, pruébese que existen unas constantes $M \geqslant 0$ y k tales que

$$|x(t) - y(t)| \leqslant Me^{kt}|x^0 - y^0|$$

para todo $t \geqslant 0$ (hay dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales).

4 Sistemas lineales con coeficientes constantes II: sistemas planos. Ecuaciones lineales de segundo orden

En este capítulo vamos a estudiar detenidamente los sistemas de dos ecuaciones lineales. Son, claro está, los sistemas más simples y los resultados para ellos son más completos que para dimensiones superiores, disponiéndose, además, de interpretaciones geométricas bidimensionales muy elocuentes mediante los conceptos de *trayectoria* y *diagrama de fases* que se desarrollan en los apartados 4.2 y 4.3. Por otro lado, son muy importantes en las aplicaciones, como lo son las ecuaciones de segundo orden, las cuales se estudian en el apartado 4.4, reduciéndolas a un sistema plano equivalente. En el apartado 4.5 se exponen algunas de las aplicaciones clásicas de las ecuaciones de segundo orden.

4.1. Autovalores dobles

Nos planteamos la resolución del sistema

$$x' = Ax \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

La ecuación característica de A es

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0$$

con lo que los autovalores están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A}\right]$$

Si $(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A > 0$, los autovalores son dos números reales distintos y la matriz A es diagonalizable, a saber, semejante a la matriz:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Si $(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A < 0$, los autovalores son números complejos conjugados, $a \pm bi$, y la matriz A es semejante a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{3}$$

En ambos casos sabemos ya resolver la ecuación (1) por las técnicas desarrolladas en el capítulo 3.

Queda únicamente por estudiar el caso en que $(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A = 0$ y, entonces, $\lambda = 1/2\,(a_{11} + a_{22})$ es un *autovalor doble* (que, necesariamente, será real). Puede ocurrir en este caso que existan dos autovectores linealmente independientes correspondientes a λ o que sólo exista uno, es decir, que la dimensión del espacio propio de λ sea 2 ó 1. En el primer caso, la matriz A será semejante a la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$$

Pero si P es la correspondiente matriz de paso (formada por dos columnas que son autovectores linealmente independientes de λ) se habrá de tener

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}P^{-1} = (\lambda I)PP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(pues las matrices de la forma αI conmutan con cualquier otra matriz), es decir, A *ya era* la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

y habríamos resuelto el sistema (1) (dos ecuaciones escalares desacopladas) sin necesidad de ningún cambio de variables previo.

El único caso realmente nuevo se presenta cuando el espacio propio del autovalor doble λ es de dimensión 1. Al no haber dos autovectores linealmente independientes de A, ésta no es diagonalizable, pero vamos a probar que, en este caso, la matriz A es semejante a la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

matriz que es «casi diagonal» (incluso podría cambiarse el 1 por cualquier $\varepsilon \neq 0$, como se apreciará en la demostración que sigue)[1].

---

[1] La matriz B es la denominada forma canónica de Jordan de la matriz A. Cuando la matriz A es semejante a una matriz diagonal (2), ésta es la forma canónica de Jordan; si los autovalores son complejos, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, A es también semejante a la matriz de elementos reales (3), la cual recibe el nombre de forma canónica real de A. Consideraremos la forma canónica de Jordan de una matriz general A en el capítulo 5.

Para ello, reescribamos la relación $P^{-1}AP = B$ en la forma $AP = PB$:

$$A\begin{bmatrix} | & | \\ v^1 & v^2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v^1 & v^2 \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

a fin de poner de manifiesto cuál ha de ser la matriz de paso P. Se tiene

$$A\begin{bmatrix} | & | \\ v^1 & v^2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ Av^1 & Av^2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} | & | \\ v^1 & v^2 \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \lambda v^1 & \lambda v^2 + v^1 \\ | & | \end{bmatrix}$$

Ha de ser pues

$$Av^1 = \lambda v^1 \tag{4}$$

$$Av^2 = \lambda v^2 + v^1 \tag{5}$$

En cuanto a (4), no presenta problema: se tomará como v^1 un autovector de λ, es decir, una solución del sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Considerando, por ejemplo, la primera ecuación de (6) vemos que una solución es

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ -(a_{11} - \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

(ya que $\lambda = (a_{11} + a_{22})/2$), es decir, la segunda columna de $A - \lambda I$ [2]. Cualquier otro autovector de λ, v^1 será un múltiplo de éste, pues estamos considerando el caso en que la dimensión del espacio propio de λ es uno. Como consecuencia de lo anterior, el sistema de ecuaciones

$$(A - \lambda I)x = v^1$$

[2] Si $a_{12} = 0$ y $a_{22} - \lambda = 0$ (o sea, $\lambda = a_{22} = a_{11}$), se tomaría como v^1 la primera columna de $A - \lambda I$, o sea, $\begin{bmatrix} 0 \\ a_{21} \end{bmatrix}$. No pueden ser ambas columnas el vector cero, pues si $a_{12} = a_{21} = 0$, la matriz A sería diagonal, $A = \lambda I$, y estamos excluyendo esta hipótesis.

siendo v^1 un autovector de λ, tiene solución, por ser v^1 una cierta combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes del sistema. Tomemos una de ellas como v^2:

$$(A - \lambda I)v^2 = v^1$$

Sólo queda probar que v^1 y v^2 son linealmente independientes. Pero si fuese $v^2 = \alpha v^1$, es decir, si v^2 fuese también autovector, se tendría

$$(A - \lambda I)v^2 = 0 \neq v^1$$

Se determinan, pues, v^1 y v^2 como se acaba de describir y formando la matriz no singular

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ v^1 & v^2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema (1) realizamos, como en casos anteriores, el cambio de variables

$$x = Py$$

y se tiene el sistema equivalente

$$y' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} y \tag{7}$$

es decir,

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \tag{8}$$

La segunda ecuación puede resolverse de manera inmediata:

$$y_2(t) = e^{\lambda t}k_2 \quad , \quad k_2 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Llevando (9) a la primera ecuación de (8) resulta

$$y_1' = \lambda y_1 + e^{\lambda t}k_2 \tag{10}$$

que, para cada $k_2 \in \mathbb{R}$, es una ecuación lineal escalar no homogénea. Utilizando el método del apartado 1.1, tenemos que la solución general de la ecuación homogénea es

y que una solución particular de (10) es

$$te^{\lambda t}k_2$$

(por el método de variación de las constantes), con lo que la solución general de (10) es

$$y_1(t) = e^{\lambda t}k_1 + te^{\lambda t}k_2 \tag{11}$$

Escribiendo (9) y (11) en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(vemos cómo $k_1 = y_1(0)$, $k_2 = y_2(0)$).

Deshaciendo el cambio de variables, $x = Py$, tenemos que la solución general de $x' = Ax$ es

$$x(t) = P\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

y que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{14}$$

es

$$x(t) = P\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}P^{-1}x^0 \tag{15}$$

EJEMPLO. Calculemos la solución general del sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}x \tag{16}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Es decir, $\lambda = 3$ es autovalor doble. La matriz A no es diagonalizable, pues no es de la forma λI. Habrá, pues, un solo autovector linealmente independiente, solución de

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, verificando,

$$x_1 + x_2 = 0$$

Tomamos, por ejemplo,

$$v^1 = (1, -1)$$

Planteamos ahora el sistema

$$(A - \lambda I)x = v^1$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o sea,

$$x_1 + x_2 = 1$$

Tomamos, por ejemplo,

$$v^2 = (0, 1)$$

con lo que la matriz que da el cambio de coordenadas es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución general del sistema (16) es, entonces:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 t \\ k_2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 t \\ -k_1 - k_2 t + k_2 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{cases} x_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^{3t} \\ x_2(t) = (-k_1 + k_2 - k_2 t)e^{3t} \end{cases}$$

4.2. Trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales

Si sabemos que una cierta función $y = f(x)$ está dada por

$$y = \frac{3x - 2}{\sqrt{1 + 2x^2}} \tag{1}$$

esta fórmula, compuesta por operaciones matemáticas simples, permite, desde luego,

establecer tablas numéricas que describen, con la exactitud que se desee, cómo la variable dependiente y varía al variar la variable independiente x. Pero una de esas tablas (o el cálculo numérico concreto que pueda hacerse en una determinada aplicación) nunca puede proporcionar la información global sobre el *comportamiento* de la función contenida en la *gráfica* de la función (Fig. 1), obtenida mediante el proceso bien conocido de determinación de posibles asíntotas, análisis de crecimiento, puntos críticos, concavidad, etc.

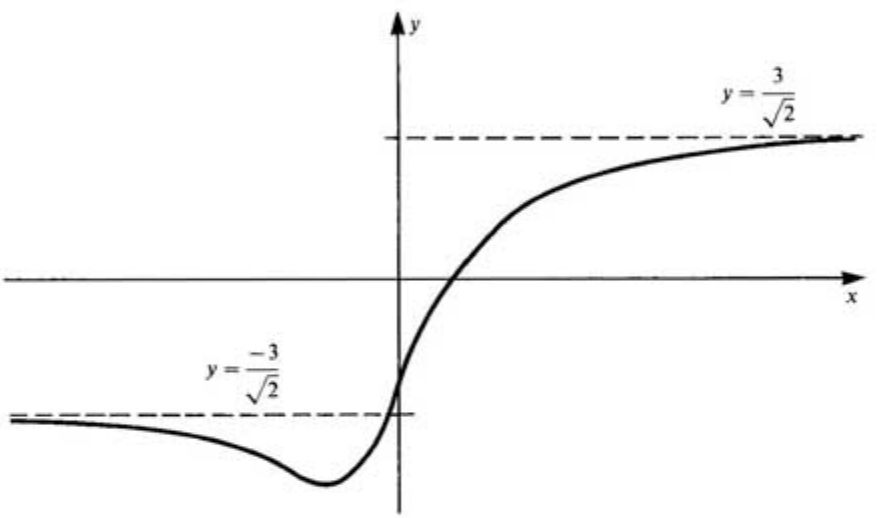


Figura 1

De manera completamente análoga, nosotros sabemos ya determinar explícitamente las soluciones de cualquier sistema lineal homogéneo de dimensión 2, pero además del conocimiento de las correspondientes expresiones analíticas interesa tener también una representación gráfica en la que reflejar las propiedades cualitativas de las soluciones, por las mismas razones de utilidad que en el ejemplo mencionado de representación de curvas y que serán aún más determinantes cuando, en las ecuaciones generales no lineales, no se disponga de fórmulas explícitas para las soluciones.

Las gráficas de las soluciones de un sistema de la forma

$$x' = Ax \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

serán curvas en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ lo que, en general, dará lugar a una imagen no muy transparente (la gráfica de una función $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ es, como se sabe, el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por los puntos $(t, x_1(t), x_2(t))$, variando t en el intervalo de $\mathbb{R}$ en que están definidas las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, intervalo que en el caso del sistema (2) es todo $\mathbb{R}$).

Pero hay otro modo de obtener una representación geométrica de una solución de (2) que consiste en considerar la *imagen* de la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$:

$$t \mapsto (x_1(t),\ x_2(t)) \tag{3}$$

es decir, el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por los puntos $(x_1(t),\ x_2(t))$ con $t \in \mathbb{R}$ y siendo (3) una solución de (2). Este subconjunto es una curva en el plano $\mathbb{R}^2$ que se denomina *trayectoria* u *órbita* de dicha solución, y no es otra cosa que la proyección sobre el plano $(x_1,\ x_2)$ de la gráfica de la solución.

Se tiene así una imagen bidimensional de las soluciones del sistema, y una imagen bidimensional es siempre más clara que una tridimensional.

Consideremos, por ejemplo, el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{4}$$

cuyas soluciones, como hemos visto en el apartado 3.2, están dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = \ \ k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t \\ x_2(t) = -k_1 \operatorname{sen} t + k_2 \cos t \end{cases} \tag{5}$$

Las gráficas de las funciones $t \mapsto (x_1(t),\ x_2(t))$ definidas por (5) son curvas en $\mathbb{R}^3$ todavía fácilmente «reconocibles». Se trata de hélices circulares de *paso* 2π (o sea, cuando t se incrementa en 2π, x_1 y x_2 repiten valores, pues las funciones (5) son periódicas de período 2π) arrolladas sobre los cilindros $x_1^2 + x_2^2 = k_1^2 + k_2^2$ (que tienen por eje el eje t). Pero mucho más reconocibles son las trayectorias, pues al eliminar t en las ecuaciones (5) (operación analítica que corresponde a la operación geométrica de proyectar las gráficas de las soluciones sobre el plano $(x_1,\ x_2)$) se obtienen las *curvas* en el plano

$$x_1^2 + x_2^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{6}$$

es decir, *circunferencias* de centro el origen. Se ilustra lo anterior en la figura 2.

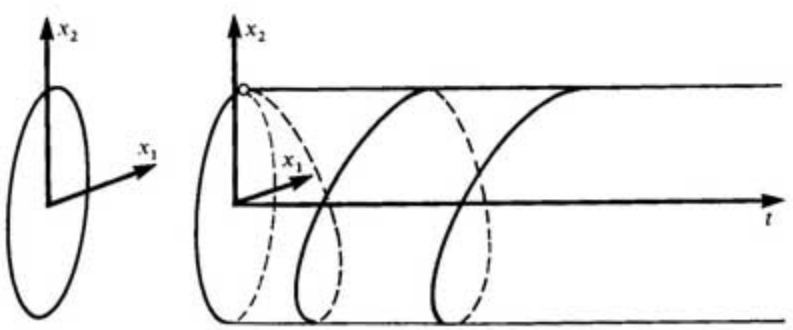


Figura 2

Por añadidura, en el plano (x_1, x_2) se puede dibujar un número de trayectorias suficiente para tener una idea de conjunto del comportamiento de las soluciones del sistema, lo que sería impracticable para las gráficas en $\mathbb{R}^3$ de dichas soluciones (Fig. 3). Sobre las trayectorias se dibuja una flecha que indica el sentido en el que varían x_1 y x_2 cuando t crece, o sea, en un lenguaje «dinámico», el sentido en que se recorre la trayectoria cuando el tiempo t avanza: si en el instante inicial $t_0 = 0$ estamos en el punto inicial $(x_1(0), x_2(0))$ —obsérvese en (5) que (k_1, k_2), para cada solución, representa la condición inicial $(x_1(0), x_2(0))$— nos desplazaremos al transcurrir el tiempo sobre la circunferencia

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2(0) + x_2^2(0)$$

en el sentido de las agujas del reloj, dando una vuelta completa en el *período* 2π. Se suple mediante este artificio el que no aparezca explícitamente la variable independiente t en la representación geométrica de las trayectorias.

La figura 3 proporciona una descripción cualitativa muy útil del comportamiento de las soluciones del sistema (4). Uno de los objetivos principales de este curso consiste en analizar, con el mayor detalle posible, las características de ese comportamiento para sistemas generales, o, en otras palabras, las características del *diagrama de fases*, término por el que se conoce la familia de todas las trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales en tanto que subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$. La figura 3 representa geométricamente el diagrama de fases el sistema (4). En este diagrama de fases hay una trayectoria especial: se trata del origen de coordenadas, y es la trayectoria correspondiente a la solución constante $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, función que es, claramente, solución de cualquier sistema lineal homogéneo $x' = Ax$.

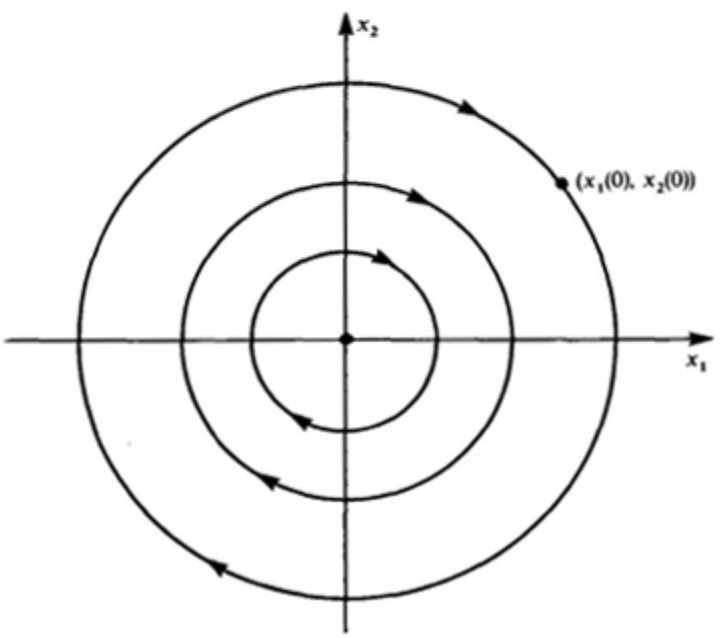


Figura 3

Cualquier función constante $x_1(t) \equiv \bar{x}_1$, $x_2(t) \equiv \bar{x}_2$, que sea solución de un sistema de la forma (2), recibe el nombre de *solución estacionaria* del sistema. La trayectoria de una solución estacionaria será un punto del plano (x_1, x_2) que se denomina *punto de equilibrio, punto singular* o *punto fijo* del sistema. Todos estos términos aluden al significado dinámico de tales soluciones y trayectorias. Los puntos de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ del sistema (2) son los puntos del plano tales que $Ax = 0$, es decir, cuyas coordenadas satisfacen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

pues eso es equivalente a que las funciones constantes $x_1(t) \equiv \bar{x}_1$, $x_2(t) \equiv \bar{x}_2$ sean soluciones del sistema $x' = Ax$.

Si $\det A \neq 0$, el único punto de equilibrio es el origen de coordenadas y se dice que el sistema de ecuaciones diferenciales es *simple* o *elemental*. Si $\det A = 0$, lo que es equivalente a que 0 sea autovalor de A, el conjunto de puntos de equilibrio del sistema coincide con el espacio propio del autovalor 0 (una recta o todo el plano, según que la dimensión sea 1 ó 2).

Obsérvese que, salvo en el caso de los puntos de equilibrio, infinitas (gráficas de) soluciones de (4) se proyectan en una única trayectoria: las infinitas soluciones correspondientes a condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0))$ tales que $x_1^2(0) + x_2^2(0) = r^2$, con $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, o sea, que están sobre la circunferencia de centro el origen y radio r, tienen todas por trayectoria dicha circunferencia (las gráficas de las soluciones son, todas ellas, hélices arrolladas sobre el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Esto es general para los sistemas $x' = Ax$, debido a que si $x(t)$ es una solución del sistema, también lo es la función $z(t) = x(t + \tau)$ cualquiera que sea el número real τ, como se puede comprobar fácilmente. Y todas esas funciones, siendo distintas, poseen la misma imagen en $\mathbb{R}^2$, es decir, dan lugar a la misma trayectoria (las funciones $x(t + \tau)$ son, podríamos decir, distintas parametrizaciones de dicha trayectoria, la cual es una curva en $\mathbb{R}^2$).

A pesar de ese hecho, *dos trayectorias de $x' = Ax$ no se pueden cortar* y, en consecuencia, por cada punto del plano pasa una única trayectoria. Nótese que la unicidad de solución del problema de valor inicial se establece fijando un instante inicial t_0 e implica, por supuesto, que las *gráficas* de dos soluciones distintas no se pueden cortar. Pero, en principio, no estaría descartado el que para dos soluciones distintas $x(t)$ e $y(t)$ ocurriese que $x(t_1) = y(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$. Supuesta esta situación se considera la función $z(t) = y(t + t_2 - t_1)$ que, según lo anterior, también es solución del sistema diferencial. Se tiene que

$$z(t_1) = y(t_1 + t_2 - t_1) = y(t_2) = x(t_1)$$

por hipótesis, de donde, por la unicidad de solución del problema de valor inicial (planteado en t_1 como instante inicial), habrá de ser $z(t) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Y como $z(t)$ es de la forma $y(t + \tau)$, con $\tau = t_2 - t_1$, resulta, según decíamos antes, que $x(t)$ e $y(t)$ dan lugar a la misma trayectoria (así pues, dos soluciones, o bien dan

lugar a la misma trayectoria y son de la forma $x(t)$, $x(t + \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$, o bien sus trayectorias no se cortan en ningún punto).

Por otra parte, si ocurre para *una* solución $x(t)$ que $x(t_1) = x(t_2)$ con $t_2 \neq t_1$, entonces esa solución será una función periódica y su trayectoria será una curva cerrada [3]. En efecto, considerando de nuevo la función $z(t) = x(t + t_2 - t_1)$, es solución del sistema y verifica

$$z(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$$

por la hipótesis sobre $x(t)$, con lo que, por la unicidad de solución del problema de valor inicial, se tendrá $x(t) = z(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o sea,

$$x(t) = x(t + t_2 - t_1) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

lo que significa que $x(t)$ es periódica de periodo $t_2 - t_1$. Si, en particular, $x(t_1) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se tratará de una solución estacionaria, caso trivial de periodicidad, y su trayectoria será un punto de equilibrio del sistema.

Puede ser útil comentar desde otro ángulo la unicidad de trayectoria que pasa por un punto en relación con la infinidad de soluciones de las que proviene. Podemos imaginar que en el punto P de $\mathbb{R}^2$ «comienza» (o sea, P representa el *estado inicial* del sistema físico eventualmente bajo estudio) un proceso que se desarrolla en el tiempo a lo largo de la trayectoria γ que pasa [4] por P. Estamos así viendo a γ como la trayectoria de la solución única $x(t)$ que verifica $x(0) = P$ y que describe dicho proceso (Fig. 4).

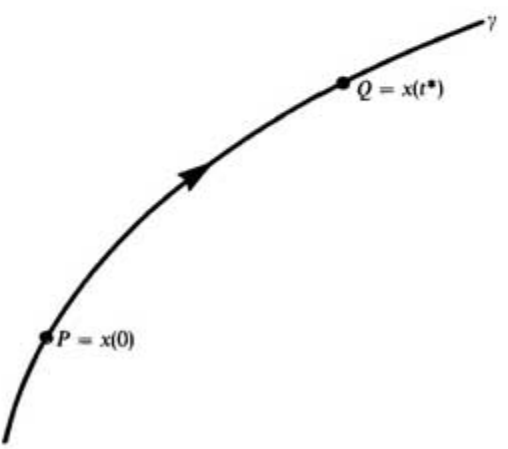


Figura 4

[3] Concretamente, una curva cerrada *simple*. Volveremos a esto con más detalle al estudiar las ecuaciones no lineales autónomas.

[4] Podemos pensar, por ejemplo, en una partícula móvil que comienza en P y tal que la trayectoria de su movimiento, gobernado por la ecuación $x' = Ax$, es justamente γ.

Si Q es otro punto de γ, se tendrá $Q = x(t^*)$ para un cierto $t^* \neq 0$. Si se adopta Q como estado inicial, le corresponderá una solución única $y(t)$ del sistema, tal que $y(0) = Q$. Considerando la función $z(t) = x(t + t^*)$, también solución del sistema como sabemos, se tiene que $z(0) = x(t^*) = Q$, es decir, $z(t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por la unicidad de solución para el problema de valor inicial, y, por tanto,

$$y(t) = x(t + t^*) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

y ambas soluciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen a γ por trayectoria; $x(t)$ e $y(t)$ representan parametrizaciones distintas de la curva γ, y ésta es «la trayectoria de todos sus puntos» en el sentido de que sobre ella se desarrolla el proceso que «comienza» en cualquiera de ellos.

Las trayectorias de un sistema lineal $x' = Ax$ admiten también la siguiente interpretación geométrica. La matriz A define una aplicación (lineal) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

$$x \mapsto Ax \tag{7}$$

o, en otras palabras, un *campo vectorial* en $\mathbb{R}^2$, que se representa geométricamente dibujando el vector Ax con origen en x. Por ejemplo, el campo vectorial asociado al sistema (4) se representa en la figura 5.

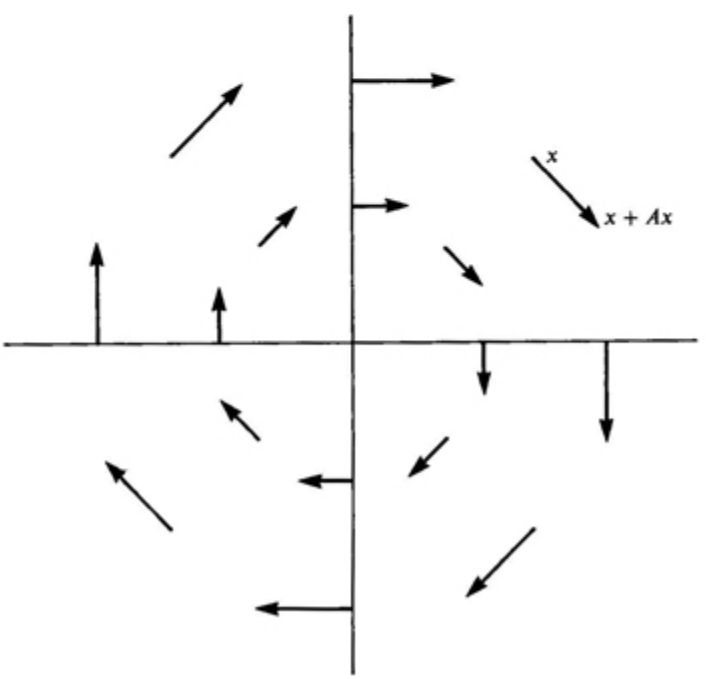


Figura 5

Decir que $x(t)$ es solución de $x' = Ax$, $x'(t) = Ax(t)$, es decir que el *vector tangente* a su trayectoria en cada uno de sus puntos, dado por $x'(t)$, es precisamente el vector que el campo definido por (7) asigna al punto considerado (Fig. 6). Las trayectorias del sistema $x' = Ax$ son, pues, las denominadas *curvas integrales* del campo vectorial Ax.

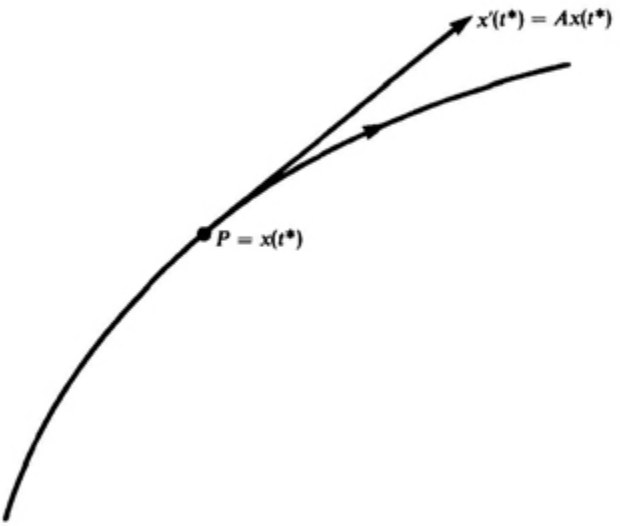


Figura 6

Todas las definiciones y propiedades que acabamos de ver, relativas a las trayectorias de un sistema de dos ecuaciones lineales, son perfectamente válidas para sistemas de n ecuaciones, pues se advertirá que la dimensión 2 no ha intervenido en nada esencial. Las trayectorias de un sistema $x' = Ax$, siendo A una matriz $n \times n$, serán curvas en $\mathbb{R}^n$ (las curvas integrales del campo vectorial $x \mapsto Ax$) y lo que se pierde, claro, es la posibilidad de disponer para el diagrama de fases de figuras tan claras como las bidimensionales (para $n = 3$ se tiene, al menos, la posibilidad de intentar una representación de las trayectorias —véase el capítulo 6— pues las gráficas de las soluciones serán ya curvas en $\mathbb{R}^4$).

Para $n = 1$, el diagrama de fases de $x' = ax$ es muy simple, demasiado simple, como se ve en la figura 7, y por eso es más elocuente dibujar las gráficas de las soluciones, que son curvas en $\mathbb{R}^2$ (Fig. 8).

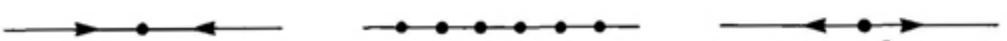


Figura 7

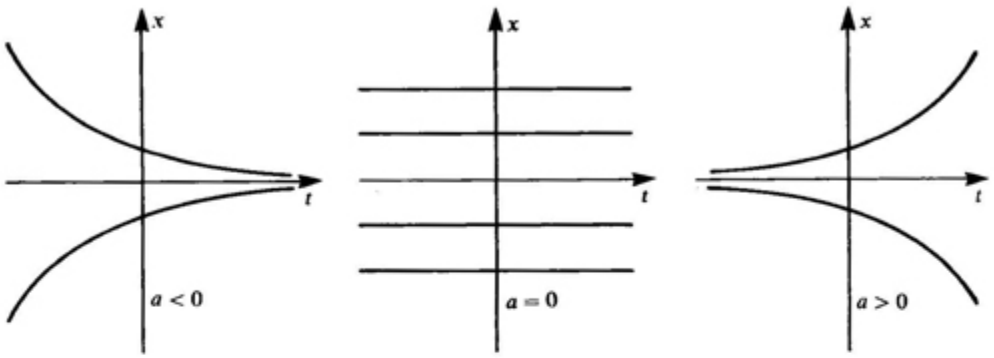


Figura 8

La noción de trayectoria es útil en los sistemas lineales en los que los coeficientes no dependen de t. Nada impediría definir las trayectorias de un sistema $x' = A(t)x$ como las proyecciones sobre el espacio de las x's, $\mathbb{R}^n$, de las gráficas en $\mathbb{R}^{n+1}$ de las soluciones del sistema, pero el campo $x \mapsto A(t)x$ no sería constante en el tiempo, las trayectorias podrían entonces cortarse entre ellas o a sí mismas (ya no es cierto que si $x(t)$ es solución también lo es $z(t) = x(t + \tau)$, con $\tau \in \mathbb{R}$) y el diagrama de fases no tendría la simplicidad que permite tener en él reflejado el comportamiento de conjunto de las soluciones [5].

4.3. Diagramas de fases de los sistemas planos

Vamos a estudiar en este apartado los diagramas de fases de los sistemas planos elementales, o sea, aquellos para los que $\det A \neq 0$ (equivalentemente, $\lambda = 0$ *no* es autovalor de A) y, en consecuencia, el origen es el único punto de equilibrio. Los casos en que $\det A = 0$ se dejan como ejercicio (problema 5).

Según hemos visto, existe un cambio de variables lineal $x = Py$, con P no singular, que transforma el sistema

$$x' = Ax \tag{1}$$

en el *sistema canónico* equivalente

$$y' = By \tag{2}$$

[5] Del mismo modo, la noción de trayectoria y el análisis del diagrama de fases serán fundamentales en el estudio de las ecuaciones no lineales *autónomas*, o sea, las ecuaciones de la forma $x' = f(x)$ en las que el segundo miembro no depende de t.

donde $B = P^{-1}AP$ tiene una de las cuatro formas siguientes

$$\begin{aligned} &(A)\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 \quad ; \quad (B_1)\begin{bmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{bmatrix} \\ &(B_2)\begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{bmatrix} \qquad\qquad ; \quad (C)\begin{bmatrix}a & b \\ -b & a\end{bmatrix}, \quad b > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

según sean los autovalores de A. Aunque es posible determinar las ecuaciones de las trayectorias de *cualquier* sistema $x' = Ax$ (véase la nota 1 al final del apartado), los resultados, en un plano tan general, son tan complicados que no permiten un análisis geométrico simple del diagrama de fases. Resulta mucho más sencillo estudiar, en primer lugar, los diagramas de fases de los sistemas canónicos y deshacer después el cambio de variables $x = Py$ para obtener el diagrama de fases del sistema original considerado. Veamos caso por caso.

A) Autovalores reales distintos

La forma canónica de A es, en este caso, la matriz (3*A*) y, en consecuencia, el sistema canónico es

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \tag{4}$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = k_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

siendo k_1 y k_2 dos constantes reales arbitrarias.

Si suponemos que $k_2 = 0$ (lo que corresponde a condiciones iniciales con la segunda coordenada nula), la correspondiente solución será de la forma

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Si $k_1 > 0$, se tendrá $y_1(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, de hecho, $y_1(t)$ recorre todo el semieje positivo de abscisas cuando t recorre $\mathbb{R}$. La correspondiente trayectoria será, pues, dicho semieje, cualquiera que sea $k_1 > 0$. Y si $k_1 < 0$, la trayectoria será el semieje negativo de abscisas. De modo análogo, considerando $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$, se ve que también son trayectorias los semi-ejes de ordenadas (excluido el origen que, como vimos, constituye por si solo una trayectoria, la correspondiente a la solución estacionaria $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$).

El resto de las trayectorias, correspondientes a soluciones con $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, se obtendrán *eliminando* t en las ecuaciones (5). Se tiene así:

$$\ln \frac{y_1}{k_1} = \lambda_1 t \quad , \quad \ln \frac{y_2}{k_2} = \lambda_2 t$$

Y, por tanto,

$$\frac{y_2}{k_2} = \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} \tag{7}$$

Nótese que

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{y_1}{k_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1 - 1} \tag{8}$$

y

$$\frac{d^2y_2}{dy_1^2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{k_2}{k_1^2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)\left(\frac{y_1}{k_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1 - 2} \tag{9}$$

Si λ_1 y λ_2 tienen *signos opuestos*, las trayectorias descritas por (7) tienen un aspecto de hipérbolas, con los semiejes (que también son trayectorias) por asíntotas y recorridas como indican las flechas en la figura 9, según se deduce de (7), (8) y (9) (si se hubiese adoptado el criterio opuesto en la forma canónica (3*A*), o sea, $\lambda_1 < \lambda_2$, los ejes de coordenadas intercambiarían sus papeles y el diagrama de fases tendría el aspecto del de la figura 9 con el sentido de las flechas invertido). En este caso se dice que el origen (o el propio sistema $x' = Ax$) es un *punto de silla* o un *puerto*[6].

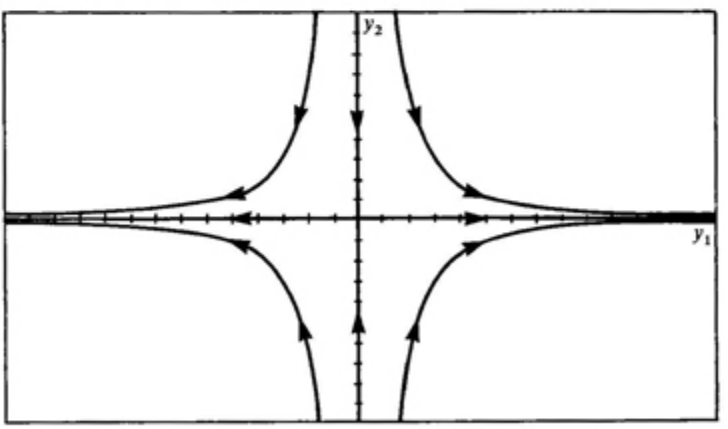


Figura 9.—Punto de silla ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$).

[6] Recuérdese el aspecto de las curvas de nivel de una superficie que representase una silla de montar o un puerto de montaña.

Vemos cómo sólo dos trayectorias, los semiejes verticales, se acercan al origen cuando $t \to \infty$, mientras que el resto (dejando aparte los semiejes horizontales, que también se alejan), aunque se aproximan a él cuando t crece desde $-\infty$, acaban, después de pasar por un punto de máxima proximidad, por alejarse indefinidamente del punto de equilibrio (éste, como indica su nombre, permanece «fijo» a lo largo del tiempo).

Cuando λ_1 y λ_2 tienen el *mismo signo*, se dice que el origen (o el propio sistema) es un *nodo*. Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, todas las trayectorias se acercan al origen cuando $t \to \infty$ (es decir, $\lim y_i(t) = 0$, cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2$, según se deduce de (5)), y se dice que el origen es un *nodo estable*, término que alude al papel que juega la solución trivial $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$: cualquiera que sea el «estado inicial» en el que se encuentre el sistema físico eventualmente modelado por la ecuación diferencial $x' = Ax$, dicho sistema acabará «estabilizándose» a largo plazo en el estado de equilibrio (0, 0). El aspecto de las trayectorias se deriva de (7), (8) y (9) y queda reflejado en la figura 10 (si se supusiese $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, cambiaría la concavidad de las gráficas, de acuerdo con (9)).

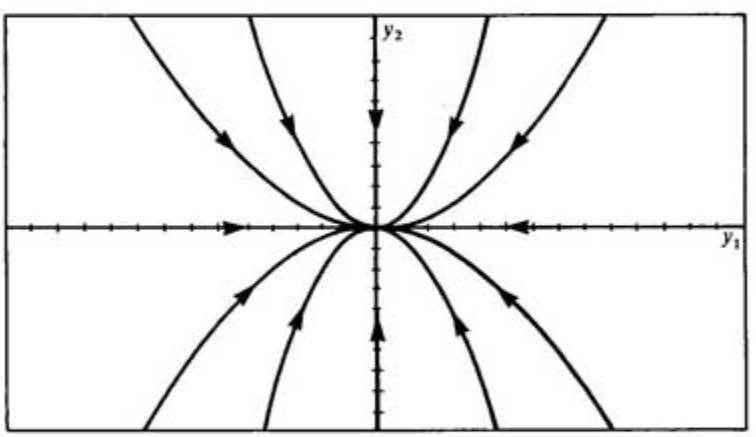


Figura 10.—Nodo estable ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$).

De (8) se deduce que

$$\lim_{y_1 \to 0} \frac{dy_2}{dy_1} = 0 \tag{10}$$

para todas las trayectorias excepto los semiejes verticales, es decir, salvo éstas, todas las trayectorias «entran» en el origen con tangente horizontal, según se ve en la figura 10 (o sea, entran en el origen por el eje correspondiente al autovalor con menor absoluto).

Si los autovalores son positivos, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, las trayectorias se alejan del origen cuando t crece, y se dice que éste es un *nodo inestable*. De (5) se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} y_i(t) = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

para cualquier solución distinta de la trivial. El diagrama de fases se representa en la figura 11. Nótese que, de acuerdo con (8),

$$\lim_{y_1 \to 0} \left| \frac{dy_2}{dy_1} \right| = \infty \tag{11}$$

para todas las trayectorias excepto los semiejes horizontales, o sea, se «sale» del origen con tangente vertical, por el eje correspondiente al autovalor de menor valor absoluto.

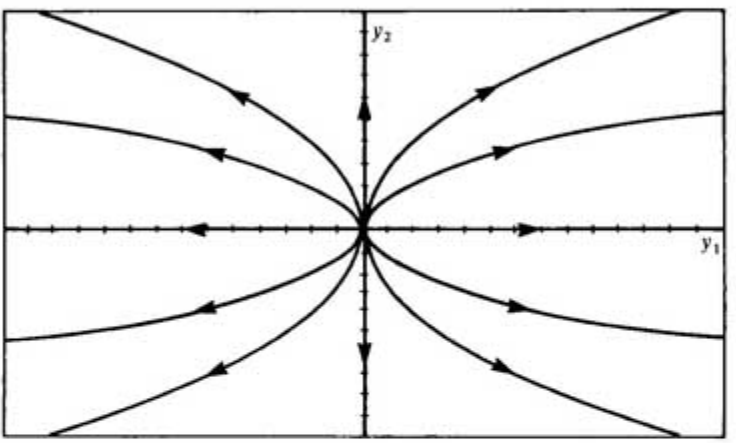


Figura 11. Nodo inestable ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$).

B) Autovalores iguales

Si la matriz A es diagonal, el sistema ya está en forma canónica y sus soluciones están dadas por (5), con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Aparte del origen y los semiejes, las trayectorias son las semirrectas

$$\frac{y_2}{k_2} = \frac{y_1}{k_1} \tag{12}$$

El origen es un tipo especial de nodo que se denomina *punto estrella*, *estable* si $\lambda < 0$ (Fig. 12) e *inestable* si $\lambda > 0$ (Fig. 13).

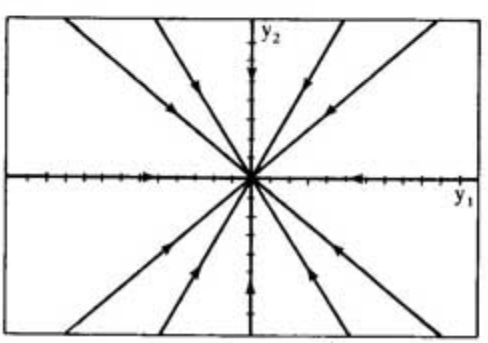


Figura 12.—Punto estrella estable ($\lambda < 0$).

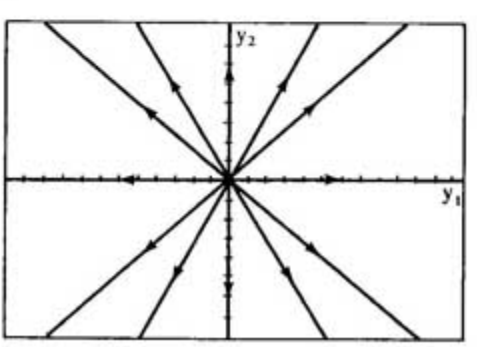


Figura 13.—Punto estrella inestable ($\lambda > 0$).

Si la matriz A *no* es diagonal, el sistema canónico es

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \tag{13}$$

siendo sus soluciones

$$\begin{cases} y_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t} \\ y_2(t) = k_2 e^{\lambda t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{14}$$

con k_1, k_2 constantes reales arbitrarias. Para $k_2 = 0$ (condiciones iniciales en el eje de abscisas), la solución es

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\lambda t} \\ y_2(t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{15}$$

Si $k_1 > 0$, la correspondiente trayectoria será el semieje positivo de abscisas, y si $k_1 < 0$, el semieje negativo. Aparte de estas dos y del origen, el resto de las trayectorias están dadas por la ecuación en coordenadas cartesianas (obtenida eliminando t en (14))

$$y_1 = y_2\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{k_2}\right) \tag{16}$$

Derivando en (16) se tiene

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{k_2}\right) + y_2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{1}{y_2}\right) = \frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda y_2} \tag{17}$$

(Véase la nota 1 al final de este apartado.) Vemos cómo las trayectorias tienen tangente vertical en el corte con la recta

$$y_2 = -\lambda y_1$$

El origen se dice que es un *nodo impropio, estable* si $\lambda < 0$ (Fig. 14) e *inestable* si $\lambda > 0$ (Fig. 15).

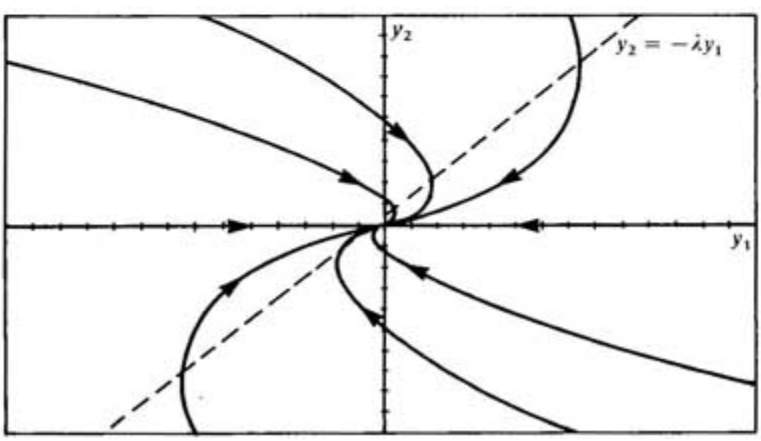


Figura 14.—Nodo impropio estable ($\lambda < 0$).

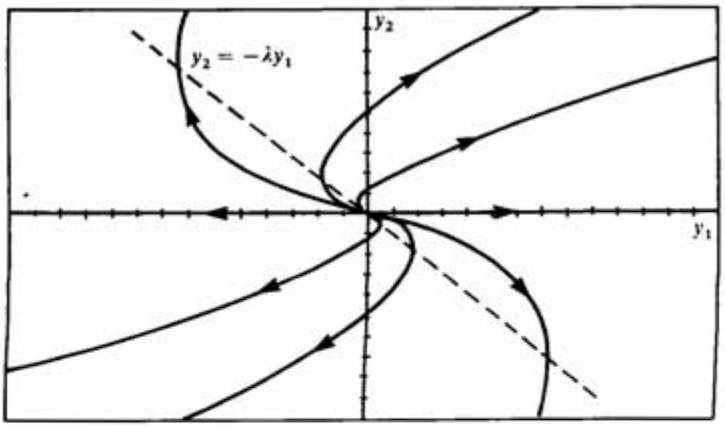


Figura 15.—Nodo impropio inestable ($\lambda > 0$).

Obsérvese que, cuando $\lambda < 0$:

$$\lim_{t \to \infty} y_i(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} |y_i(t)| = \infty \quad , \quad i = 1, 2$$

y cuando $\lambda > 0$

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} y_i(t) = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

De (14) y (17):

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{1}{t + \dfrac{k_1}{k_2} + \dfrac{1}{\lambda}}$$

de donde se deduce que cuando $\lambda < 0$ (respectivamente, $\lambda > 0$) se entra en el origen (respectivamente, se sale) con tangente horizontal, según el eje de abscisas.

C) Autovalores complejos

Si los autovalores de A son los números complejos $a \pm bi$, con $b > 0$, el sistema canónico es

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = -by_1 + ay_2 \end{cases} \tag{18}$$

Consideremos, en primer lugar, el caso en que $a \neq 0$. La solución de (18) que pasa por $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ para $t = 0$ está dada por

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \operatorname{sen} bt) \\ y_2(t) = e^{at}(-k_1 \operatorname{sen} bt + k_2 \cos bt) \end{cases} \tag{19}$$

Introduciendo, para una trayectoria distinta del origen, o sea con $(k_1, k_2) \neq \neq (0, 0)$, los números $r_0 > 0$ y θ_0 tales que

$$r_0^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad , \quad \cos \theta_0 = \frac{k_1}{r_0} \quad , \quad \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{k_2}{r_0}$$

las ecuaciones (19) toman la forma

$$\begin{cases} y_1(t) = r_0 e^{at} \cos (\theta_0 - bt) \\ y_2(t) = r_0 e^{at} \operatorname{sen} (\theta_0 - bt) \end{cases} \tag{20}$$

o sea,

$$y_1(t) = r(t) \cos \theta(t) \quad , \quad y_2(t) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t)$$

siendo $r(t)$ y $\theta(t)$ las funciones, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{at} \\ \theta(t) = \theta_0 - bt \end{cases} \tag{21}$$

$r(t)$ y $\theta(t)$ dadas por (21), representan las coordenadas polares del punto $(y_1(t), y_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, de la trayectoria considerada, con la salvedad de que $\theta(t)$, el *argumento*, está dado por (21), módulo 2π: no restringe sus valores al intervalo $[0, 2\pi)$, sino que se prolonga a todo $(-\infty, \infty)$ de modo que θ resulte una función continua y con derivada primera continua respecto a la variable independiente t. Así resultará que, a puntos próximos sobre la trayectoria (correspondientes a valores de t próximos), corresponderán valores de $\theta(t)$ (y también de $r(t)$) próximos, lo que no ocurriría si se obligase a $\theta(t)$ a mantener sus valores en $[0, 2\pi)$ (Fig. 16: siendo t_2 próximo a t_1, el argumento de $P_2 = y(t_2)$ es deseable que sea próximo al de $P_1 = y(t_1)$, o sea, que valga poco más de 2π y no poco más de 0). Toda trayectoria distinta del origen queda entonces descrita por dos *funciones polares* $r(t)$, $\theta(t)$, dadas por (21), que, como las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$, son continuas y con derivadas primeras continuas (véase la nota 2 al final de este apartado para más detalles).

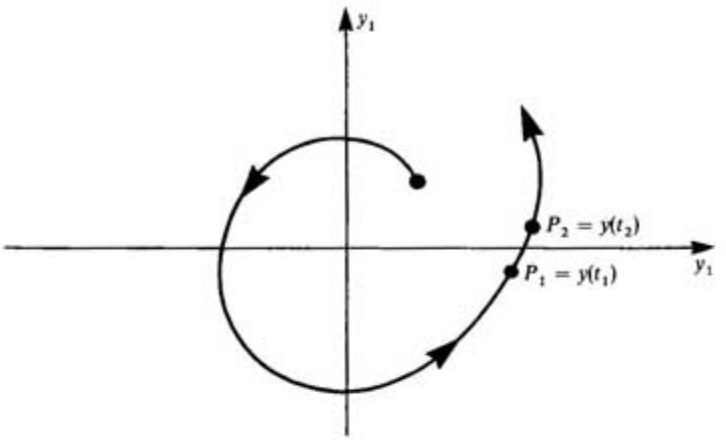


Figura 16

Eliminando t en las ecuaciones (21) se tendrán las ecuaciones en coordenadas polares de las trayectorias del sistema (18):

$$r = r_0 e^{\frac{a}{b}(\theta_0 - \theta)} \tag{22}$$

(θ varía de $-\infty$ a ∞, de acuerdo con (21)). Estas curvas son *espirales logarítmicas*. Por ello, se dice que el origen es un *punto espiral* (o, también, un *foco*). Si $a < 0$, se trata de un punto espiral *estable* debido a que $\lim r(t) = 0$ cuando $t \to \infty$, según se deduce claramente de (21) (Fig. 17). Si $a > 0$, el origen es un punto espiral *inestable*: $\lim r(t) = \infty$ cuando $t \to \infty$ para cualquier trayectoria distinta del origen (Fig. 18). El valor $b > 0$ representa la velocidad angular con la que se recorre la espiral en el sentido de las agujas del reloj (si se hubiese adoptado el convenio de que $b < 0$, las espirales de las figuras 17 y 18 cambiarían el sentido de su arrollamiento, manteniéndose, claro está, el que si $a < 0$ convergen al origen y si $a > 0$ se alejan de él al crecer t, o sea, se recorrerían en sentido contrario a las agujas del reloj).

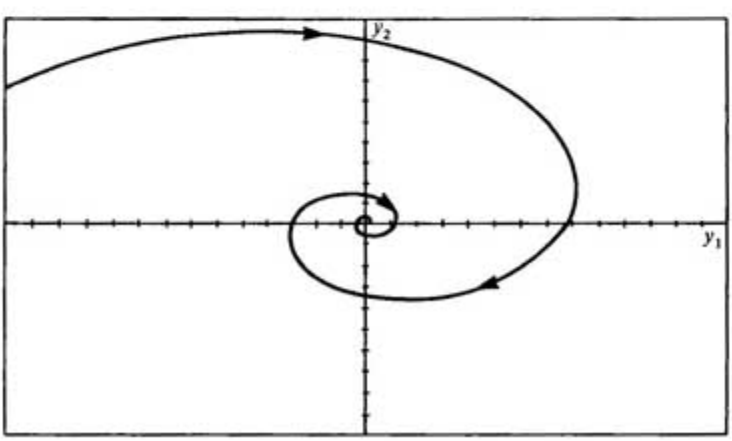


Figura 17.—Foco estable ($a \pm bi$, $a < 0$, $b > 0$).

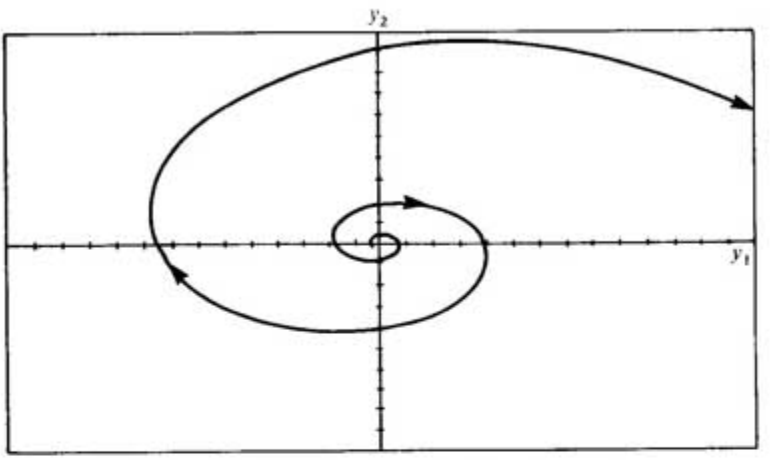


Figura 18.—Foco inestable ($a \pm bi$, $a > 0$, $b > 0$).

Si, en particular, $a = 0$, o sea, los autovalores son los números imaginarios $\pm ib$, las ecuaciones (21) toman la forma

$$\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = \theta_0 - bt \end{cases} \tag{23}$$

Así pues, las trayectorias son, además del origen de coordenadas, circunferencias de centro el punto (0, 0) recorridas en el sentido de las agujas del reloj (Fig. 19). Se dice que el origen (o el propio sistema) es un *centro*. Las soluciones son todas periódicas de periodo $2\pi/b$ (la solución estacionaria $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ es trivialmente periódica). Éste es el único caso de sistema de dos ecuaciones lineales en que se presentan soluciones periódicas.

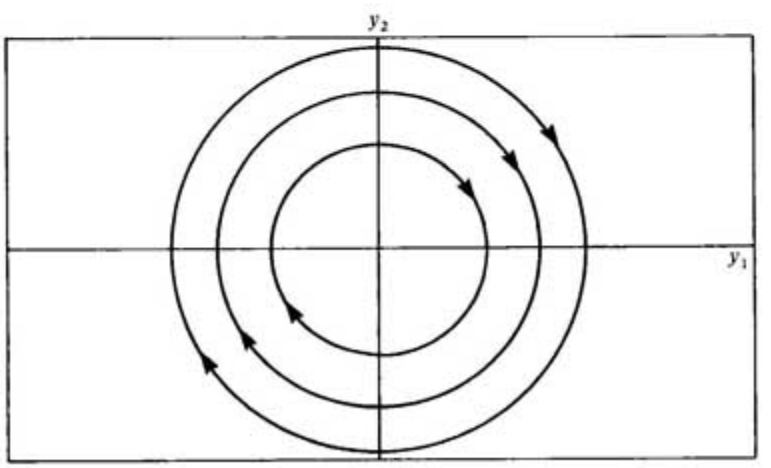


Figura 19.—Centro ($\pm bi$, $b > 0$).

Volver a las variables originales x_1, x_2 mediante el cambio

$$x = Py \tag{24}$$

equivale a realizar en el plano la transformación geométrica dada por (24). Como recordábamos en el apartado 3.1, las variables y_1 e y_2 representan las coordenadas de $x = (x_1, x_2)$ respecto a la base $\{v^1, v^2\}$ formada por las columnas de P: la relación (24) puede escribirse en la forma

$$x = y_1 v^1 + y_2 v^2 \tag{25}$$

El eje y_1 del plano $y_1 - y_2$, o sea, el conjunto de los puntos de la forma $(y_1, y_2) = (\alpha, 0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se transforma en la recta del plano $x_1 - x_2$ que pasa por el origen y tiene por dirección el vector v^1, y, análogamente, el eje y_2 se transforma en la recta de dirección v^2 (por ejemplo, si la matriz A tiene dos autovalores reales distintos, λ_1 y λ_2, entonces, v^1 y v^2, columnas de la matriz de paso P, son autovectores de A correspondientes, respectivamente, a λ_1 y λ_2 y esas dos rectas transformadas de los ejes y_1 e y_2 serán los espacios propios de λ_1 y λ_2).

La transformación *lineal* dada por P conserva las rectas, transforma las circunferencias en elipses (compruébese como ejercicio) y éstas en circunferencias u otras elipses, las hipérbolas en hipérbolas y las parábolas en parábolas; es una transformación continua, evidentemente, con lo que las trayectorias, además de conservar la orientación, conservan el comportamiento asintótico (cuando $t \to \pm\infty$). Podrán producirse cambios de escala según una o dos direcciones, rotaciones, simetrías, cizallamientos [7], pero el aspecto cualitativo del diagrama de fases se mantendrá.

Consideremos, por ejemplo, los sistemas $x' = Ax$ con A dada por

$$a)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad e)\ \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{26}$$

En todos los casos, los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, es decir, el origen es un punto de silla y el aspecto del diagrama de fases del sistema canónico,

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

es el de la figura 9. En la figura 20 se muestran los diagramas de fases de los sistemas dados por las matrices (26), indicando los autovectores v^1 y v^2 correspondientes a λ_1 y λ_2 (vectores que forman, como columnas, una matriz de paso P).

---

[7] Las transformaciones geométricas del plano dadas por matrices no singulares P constituyen el *grupo lineal* del plano, que contiene al *grupo de las semejanzas lineales*, constituido por las rotaciones, las simetrías y las homotecias junto con las composiciones entre éstas. Toda transformación del grupo lineal se puede expresar como la composición de una semejanza y una dilatación (o compresión) según una recta. Véase [9].

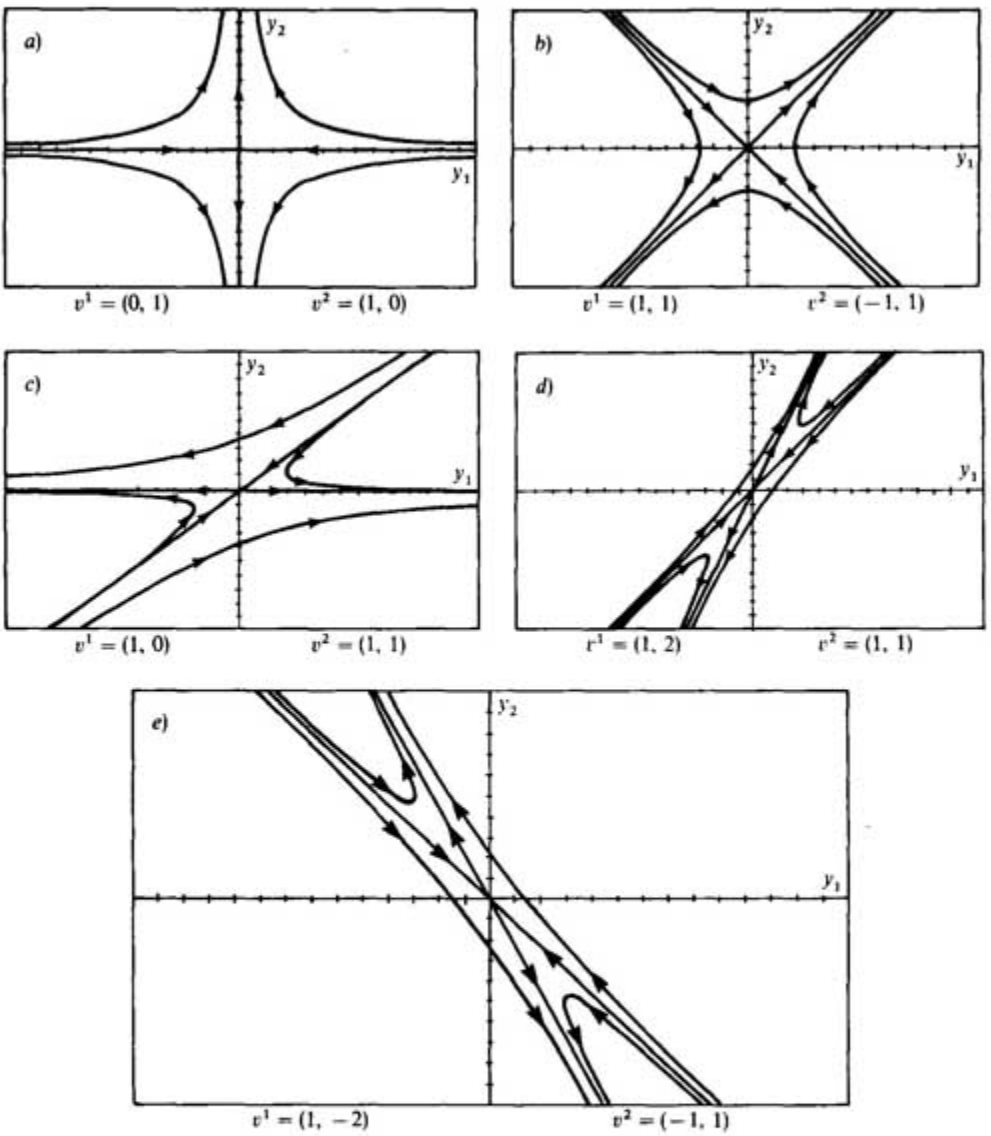


Figura 20

En las figuras 21 a 27 se muestran los aspectos típicos de los restantes tipos de sistemas planos elementales, señalando en los nodos las rectas que constituyen los espacios propios de los autovalores (el origen, que es trayectoria, las divide en dos semirrectas que son trayectorias) y en los puntos espirales y centros, las rectas transformadas por $x = Py$ de los ejes y_1 e y_2 (que, recuérdese, son las rectas que contienen a los vectores $u = \text{Re } w$, $v = \text{Im } w$, siendo w un autovector —complejo— correspondiente a $a + ib$). Las trayectorias entran (respectivamente, salen) en el origen tangencialmente al autoespacio correspondiente al autovalor de menor valor absoluto en el caso de los nodos estables (respectivamente, inestables).

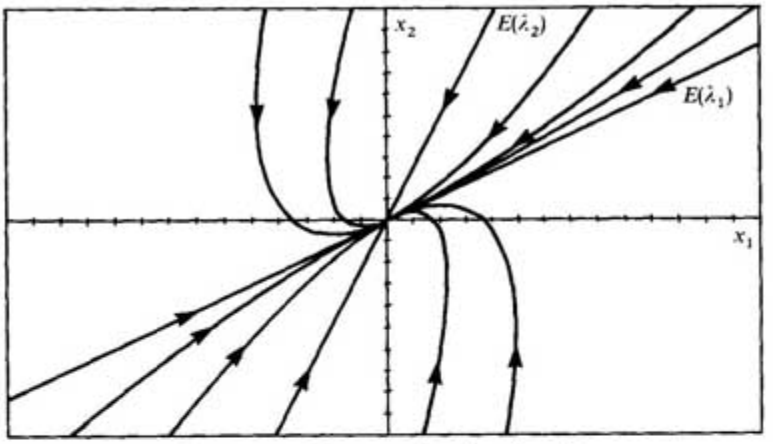


Figura 21.—Nodo estable ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$).

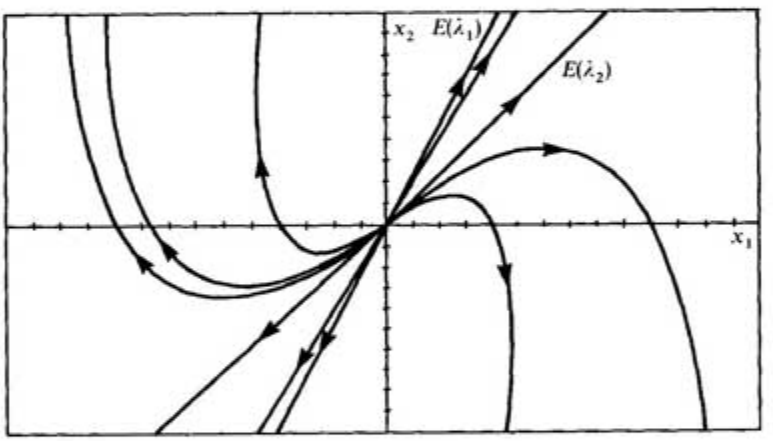


Figura 22.—Nodo inestable ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$).

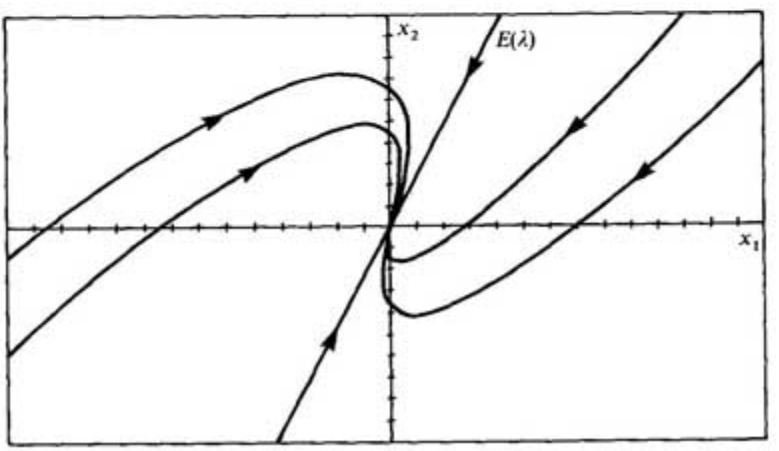


Figura 23.—Nodo impropio estable ($\lambda < 0$).

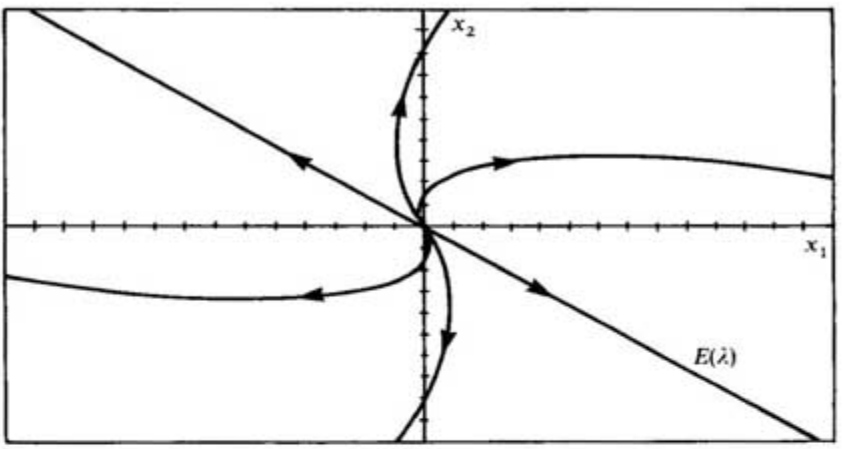


Figura 24.—Nodo impropio inestable ($\lambda > 0$).

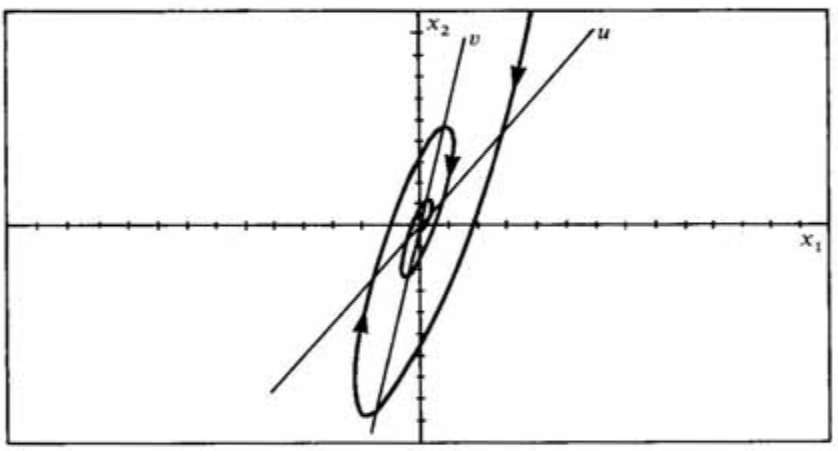


Figura 25.—Espiral estable ($a \pm bi$, $a < 0$, $b > 0$).

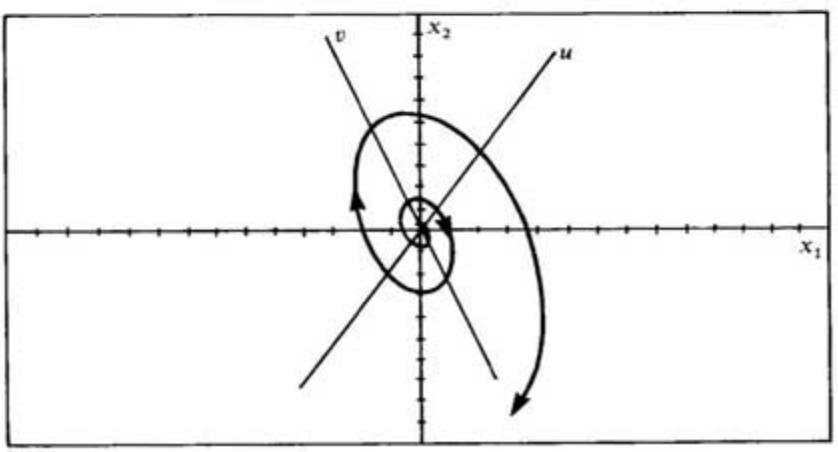


Figura 26.—Espiral inestable ($a \pm bi$, $a > 0$, $b > 0$).

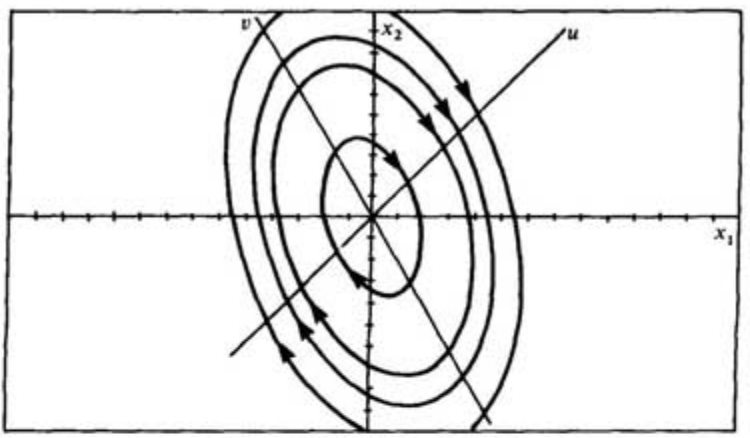


Figura 27.—Centro ($\pm bi$, $b > 0$).

El diagrama de fases de un sistema plano $x' = Ax$ depende de cómo sean los autovalores de A, y ello puede deducirse directamente de la matriz A, teniendo en cuenta que su polinomio característico es

$$\lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A$$

y que, por tanto, los autovalores están dados por

$$\frac{1}{2}(\text{Tr } A \pm \sqrt{\Delta})$$

donde $\Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det A$ (*discriminante* de la ecuación). Vemos entonces que si $\Delta \geqslant 0$, se tienen autovalores reales. Si, además, $\det A < 0$, se tendrán puntos de silla, etcétera., de modo que las distintas posibilidades dependerán de los signos de Δ, Tr A y $\det A$, quedando todas ellas reflejadas en la figura 28.

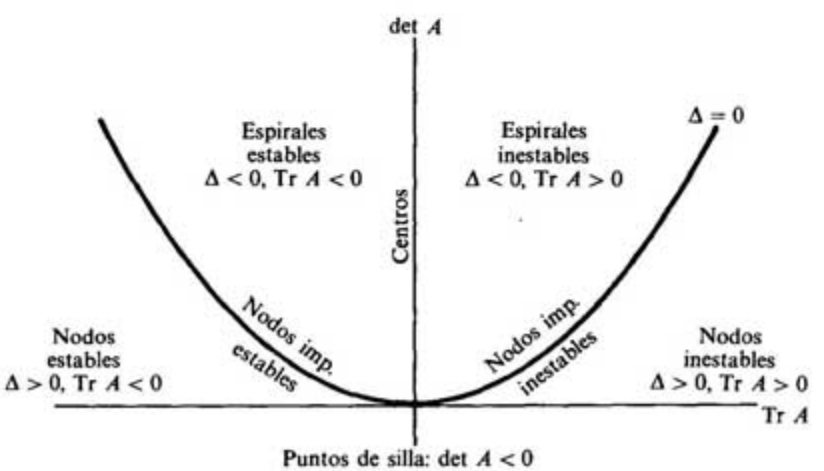


Figura 28

NOTA 1. Al comienzo de este apartado decíamos que es posible determinar las ecuaciones de las trayectorias de cualquier sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{27}$$

Veamos el sentido de esa afirmación. Sea $\{x_1(t), x_2(t)\}$ una solución cualquiera de (27) *distinta de la trivial*. Entonces, cualquiera que sea $t^* \in \mathbb{R}$, al menos una de las dos derivadas, $x_1'(t^*)$, $x_2'(t^*)$, es distinta de cero, pues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

implica $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, al ser $\det A \neq 0$, y, por lo visto en el apartado anterior, no puede existir un $t^* \in \mathbb{R}$ para el que $x_1(t^*) = 0$, $x_2(t^*) = 0$, pues ello significaría que por el origen pasarían dos trayectorias distintas.

Pongamos que para el $t^* \in \mathbb{R}$ considerado se tenga

$$x_1'(t^*) \neq 0$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, en la ecuación $x_1 = x_1(t)$ se puede «despejar» t en función de x_1: $t = t(x_1)$, en un entorno de $(t^*, x_1(t^*))$. Sustituyendo $t = t(x_1)$ en $x_2 = x_2(t)$ se tendrá:

$$x_2 = x_2(t(x_1)) = \varphi(x_1)$$

que es la ecuación en coordenadas cartesianas, en un entorno de $(x_1(t^*), x_2(t^*))$, de la trayectoria correspondiente a la solución considerada (en eso consiste «eliminar t» en las ecuaciones $x_1 = x_2(t)$, $x_2 = x_2(t)$ de dicha solución).

Por la regla de la cadena, esa función $x_2 = \varphi(x_1)$ verificará

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_1} = \frac{\dfrac{dx_2}{dt}}{\dfrac{dx_1}{dt}} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}$$

En otras palabras, las trayectorias del sistema (27) satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \tag{28}$$

[En los puntos en que se anule el denominador del segundo miembro de (28), la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \tag{28'}$$

Como hemos dicho, no se pueden anular simultáneamente numerador y denominador en ningún punto de una trayectoria distinta del origen de coordenadas.]

La ecuación (28) se denomina *ecuación diferencial de las trayectorias* del sistema (27); es una ecuación no lineal, en general, y, como veremos en el capítulo 1 de *Ecuaciones diferenciales II* se puede resolver siempre. Lo que ocurre es que la expresión que da sus soluciones no es, en general, muy transparente, y de ahí que sea más conveniente pasar al sistema canónico, tal como se ha hecho a lo largo de este apartado. Sin embargo, sí permite obtener ciertos resultados de manera más sencilla que la expuesta anteriormente. Por ejemplo, la fórmula (17) para la derivada dy_1/dy_2 es inmediata a partir de (28'). En el estudio de las ecuaciones no lineales volveremos a considerar esta ecuación diferencial de las trayectorias.

NOTA 2. Al introducir en el caso C) de autovalores complejos las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$, hacíamos observar que $\theta(t)$ se movía en $(-\infty, \infty)$, ya que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales están definidas para todo $t \in (-\infty, \infty)$ y, en consecuencia, el recorrido de la función $\theta(t) = \theta_0 - bt$ es $(-\infty, \infty)$. Esto no se corresponde exactamente con el paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares

$$(x_1, x_2) \leftrightarrow (r, \theta)$$

donde, $r \in (0, \infty)$ y, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$. En rigor:

$$\theta(t) = \text{arc tg } \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$$

entendiendo que se toma la determinación principal de la función arco tangente, o sea, $-\pi/2 < \theta(t) < \pi/2$, y que se realiza una «prolongación por continuidad» de dicha función a fin de recorrer la trayectoria a lo largo del tiempo t de modo que las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$ que describen en coordenadas polares dicho recorrido sean, lo mismo que las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ que lo describen en coordenadas cartesianas, continuas y con derivadas primeras continuas.

Conviene profundizar en esto para llegar a un planteamiento útil en situaciones más generales. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{29}$$

Suponemos que f_1 y f_2 se anulan simultáneamente sólo en el origen (0, 0). Esto significa que la única solución estacionaria de (29) es la solución trivial: $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, la cual tendrá por trayectoria el origen de coordenadas. Ninguna otra trayectoria pasará por este punto, pues, como se verá al estudiar el diagrama de fase de los sistemas no lineales, dos trayectorias del sistema (29) no se pueden cortar. Para los sistemas lineales, nuestro objeto de estudio presente, hemos probado esto en el apartado anterior. Sea

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \tag{30}$$

una solución de (29) definida en el intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ distinta de la trivial (por tanto, $x_1^2(t) + x_2^2(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \omega)$).

Asociadas a esa solución (30) definimos las *funciones polares*

$$r(t) = [x_1^2(t) + x_2^2(t)]^{1/2} \tag{31}$$

y $\theta(t)$ dada por una *determinación continua* de

$$\text{arc tg } \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \tag{32}$$

Esto quiere decir lo siguiente: supongamos que $x_1(t_0) > 0$ (los otros casos se tratarían análogamente. Véase la figura 29).

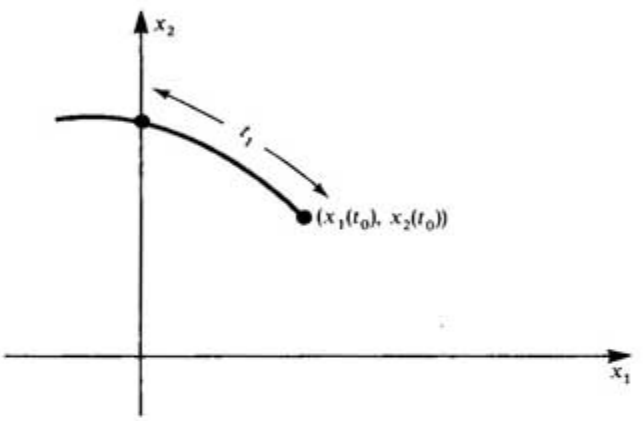


Figura 29

Se define entonces

$$\theta_1(t) = \text{arc tg } \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

mientras $x_1(t) > 0$, indicando $\theta_1(t)$ la rama principal de la función arco tangente, es decir, $-\pi/2 < \theta_1(t) < \pi/2$. Supongamos que $t = t_1$ es el primer $t > t_0$ para el que

$$\lim_{t \to t_1^-} x_1(t) = 0$$

(si existe tal t_1). Entonces:

$$\lim_{t \to t_1^-} \frac{d\theta_1(t)}{dt} = \lim_{t \to t_1^-} \frac{1}{1 + \dfrac{x_2^2(t)}{x_1^2(t)}} \frac{x_2'(t)x_1(t) - x_1'(t)x_2(t)}{x_1^2(t)} =$$

$$= -\frac{f_1(x_1(t_1),\ x_2(t))}{x_2(t_1)}$$

[$x_2(t_1) \neq 0$ pues, por hipótesis, $x_1(t_1) = 0$ y, según hemos dicho, $(x_1(t),\ x_2(t)) \neq (0,\ 0)$ para todo $t \in (\alpha,\ \omega)$, para la solución (30).]

Si $x_2(t_1) > 0$ (Fig. 29) se define, para $t_1 < t < t_1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ pequeño, $\theta_2(t)$ por (32), pero ahora con $\pi/2 < \theta_2 < 3\pi/2$. [Si $x_2(t_1) < 0$, se tomaría $-3\pi/2 < \theta_2 < -\pi/2$.]

Y, como antes,

$$\lim_{t \to t_1^+} \frac{d\theta_2(t)}{dt} = -\frac{f_1(x_1(t_1),\ x_2(t))}{x_2(t_1)}$$

con lo que la función

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & , \quad t_0 \leqslant t < t_1 \\ \pi/2 & , \quad t = t_1 \\ \theta_2(t) & , \quad t_1 < t < t_1 + \varepsilon \end{cases} \tag{33}$$

es una función continua y con derivada primera continua. Prosiguiendo así, si es necesario, se tiene una extensión con esa regularidad de la función

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

a todo el intervalo $[t_0, \omega)$ de existencia a la derecha de la solución (30), y lo mismo se haría al intervalo $(\alpha, t_0]$.

En el caso del sistema

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = -by_1 + ay_2 \end{cases} \tag{34}$$

las funciones polares asociadas a las soluciones

$$\begin{cases} y_1(t) = r_0 e^{at} \cos(\theta_0 - bt) \\ y_2(t) = r_0 e^{at} \operatorname{sen}(\theta_0 - bt) \end{cases} \tag{35}$$

serán

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{at} \\ \theta(t) = \theta_0 - bt \end{cases} \tag{36}$$

Aquí, la construcción anterior es muy simple. Por ejemplo, se tendrá $t_1 = (\theta_0 + \pi/2)/b$.

En este caso de los sistemas lineales, como también ocurre en otros, la información que necesitamos la hemos obtenido directamente de las relaciones (31) y (32), pero en ocasiones es útil determinar el sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$. Compruébese que dicho sistema es

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{r}\left[f_2(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cos\theta - f_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\right] \end{cases} \tag{37}$$

[El sistema (37) es *equivalente* al sistema (29) fuera del origen, lo que quiere decir que las soluciones respectivas, aparte de la trivial, se corresponden uno a uno; precisaremos esto al estudiar los sistemas no lineales.]

Para el sistema lineal (34) el sistema equivalente (37) es muy simple:

$$\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = -b \end{cases}$$

ecuaciones desacopladas que se resuelven elementalmente para dar las soluciones (36) (se tiene así otro método para resolver los sistemas de la forma (34) que hemos estudiado en el apartado 3.2).

4.4. Ecuaciones lineales de segundo orden

Una ecuación lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes tiene la forma

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \quad ; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x' = x_2 \end{cases} \tag{2}$$

se obtiene el sistema plano equivalente

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -a_2 x_1 - a_1 x_2 \end{cases} \tag{3}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Para resolver (4) hay que calcular, como sabemos, los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

La ecuación característica es

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{6}$$

que, como vemos, puede escribirse directamente a partir de la ecuación diferencial (1) sustituyendo orden de derivación por exponente de la indeterminada λ. Los autovalores vendrán dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$$

Se presentan tres casos:

A) Autovalores reales distintos λ_1, λ_2

En este caso, el sistema canónico equivalente al sistema (4) es, como sabemos,

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \tag{7}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} y_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{8}$$

Las soluciones de (4) vendrán dadas por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \tag{9}$$

donde P es la matriz no singular de paso que lleva de la matriz A a su forma canónica

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

De (9) se tiene que

$$x_1(t) = p_{11} k_1 e^{\lambda_1 t} + p_{12} k_2 e^{\lambda_2 t}$$

con lo que, deshaciendo el cambio de variables (2), obtenemos que el conjunto de soluciones de la ecuación (1) está dado por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{10}$$

siendo c_1, c_2 constantes reales arbitrarias. [La expresión (10) es, pues, la *solución general* de (1).]

B) Autovalores reales iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Nótese que, en este caso, la matriz A *nunca* es diagonalizable, pues eso significaría que ya era *diagonal* de la forma λI, y no puede ocurrir esto dado que $a_{12} = 1$. Así pues, el sistema canónico equivalente a (4) es

$$y' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} y$$

cuya solución general es

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

de acuerdo con lo visto en el apartado 4.1. Argumentando como antes, tendremos que, en este caso, la solución general de la ecuación (1) es

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \tag{11}$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

C). Autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2} = a \pm ib$

El sistema canónico equivalente a (4) es, en este caso:

$$y' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} y$$

siendo su solución general, de acuerdo con lo visto en el apartado 3.2:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 e^{at} \cos bt + K_2 e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -K_1 e^{at} \operatorname{sen} bt + K_2 e^{at} \cos bt \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación (1) será:

$$x(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \operatorname{sen} bt \tag{12}$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

En resumen, las soluciones de la ecuación lineal homogénea (1) están dadas por las expresiones (10), (11) ó (12), según sean las raíces de la ecuación característica, $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Si tenemos presente que esta ecuación, como decíamos antes, se puede escribir directamente a partir de la ecuación diferencial y recordamos la forma, bastante simple, de las expresiones (10), (11) y (12), no hace falta, a la hora de resolver una ecuación concreta, pasar por el sistema equivalente (4).

4.3.1. Método de coeficientes indeterminados

Para resolver la ecuación no homogénea,

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = b(t) \tag{13}$$

podemos pasar al sistema equivalente

$$x' = Ax + \bar{b}(t) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \tag{14}$$

a fin de determinar una solución particular por el método de variación de las constantes. Deshacemos después el cambio de variables (2), quedándonos con la primera componente de las soluciones del sistema (14). Este método es, como sabemos, completamente general y podemos, por tanto, resolver cualquier ecuación de la forma (13). Pero ocurre que, para cierta clase de ecuaciones (13), o sea, para determinados tipos de segundos miembros $b(t)$, hay un método alternativo para calcular una solución particular que, cuando es aplicable, lleva generalmente a cálculos más sencillos que el de variación de las constantes. Para empezar, se trabaja directamente sobre la ecuación (13), o sea, sin necesidad de pasar al sistema

equivalente, apoyándonos en que, como para las ecuaciones de primer orden o los sistemas, se tiene que la solución general de la ecuación (13) vendrá dada por la solución general de la ecuación homogénea asociada, que ya sabemos calcular, sumada a una solución particular de la propia ecuación (13). En efecto, si, como se hacía en el apartado 2.5 para la ecuación lineal general, se introduce el *operador diferencial*

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2$$

que actúa sobre funciones $u(t)$ según la fórmula

$$Lu = \frac{d^2u}{dt^2} + a_1 \frac{du}{dt} + a_2 u$$

entonces la ecuación (13) se puede escribir en la forma

$$Lx = b(t) \tag{13'}$$

L es un operador lineal, o sea,

$$L(k_1u_1 + k_2u_2) = k_1u_1 + k_2u_2$$

siendo k_1 y k_2 dos números reales, de donde se deduce, como en el capítulo 1 para las ecuaciones de primer orden, que las soluciones de la ecuación homogénea

$$Lx = 0$$

forman un espacio vectorial y que si $x_p(t)$ es una determinada solución de (13'), entonces la función $x(t)$ es solución de (13') si, y sólo si, es de la forma

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

donde $x_0(t)$ es una cierta solución de la ecuación homogénea.

Si, por ejemplo, se trata de resolver la ecuación

$$x'' - 3x' + 2x = 3$$

no tendría sentido aplicar el método de variación de las constantes, pues es inmediato observar que $x_p(t) = 3/2$ es una solución particular de la ecuación. Si se tratase de resolver la ecuación

$$x'' - 3x' + 2x = 5e^{3t} \tag{15}$$

también es razonable conjeturar que existe una solución particular de la forma

$$x_p(t) = Ae^{3t} \tag{16}$$

para un apropiado valor del coeficiente *(indeterminado)* A, teniendo en cuenta que las sucesivas derivadas de la función exponencial e^{3t} son múltiplos de la propia función e^{3t}. «Imponiendo» que, efectivamente, Ae^{3t} sea solución de la ecuación se obtiene

$$9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + eAe^{3t} = 5e^{3t}$$

es decir,

$$2Ae^{3t} = 5e^{3t} \tag{17}$$

Como la función (16) ha de satisfacer la ecuación (15) para todo $t \in \mathbb{R}$, la relación (17) ha de ser una identidad para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, los coeficientes de e^{3t} en (17) han de ser iguales:

$$2A = 5$$

lo que *determina* el valor $A = 5/2$. Se tiene, por tanto, que

$$x_p(t) = \frac{5}{2}e^{3t}$$

es una solución particular de la ecuación (15).

Apliquemos la misma idea a la ecuación

$$x'' - 3x' + 2x = 5e^t \tag{18}$$

Conjeturamos la existencia de una solución de la forma

$$x_p(t) = Ae^t$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$Ae^t - 3Ae^t + 2Ae^t = 5e^t$$

o sea,

$$0 \cdot Ae^t = 0 = 5e^t$$

que, ciertamente, no se cumple para ningún $t \in \mathbb{R}$.

La idea no ha tenido éxito y no existe ninguna solución de la forma Ae^t de la ecuación (18), a pesar de la similitud de las ecuaciones (15) y (18) y la analogía de las conjeturas realizadas. La razón de ello estriba en lo siguiente: la ecuación homogénea asociada a ambas ecuaciones es

$$x'' - 3x' + 2x = 0 \tag{19}$$

cuya solución es, de acuerdo con (10),

$$x_h(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} \tag{20}$$

Las funciones de la forma Ae^t son, por tanto, soluciones de la ecuación homogénea (19) y así, al sustituirlas en (18), el primer miembro vale cero ($L(Ae^t) = 0$, para el correspondiente operador diferencial L) y nunca, para ningún A, es posible que resulte igual a $5e^t$. Este problema no se presenta para la ecuación (15) porque su segundo miembro, $5e^{3t}$, *no* es solución de la ecuación homogénea asociada. Enseguida vamos a ver que la conjetura apropiada a la ecuación (18) es la de la existencia de una solución particular de la forma Ate^t.

Este método de obtener soluciones particulares de determinadas formas, conocidas excepto en lo que se refiere al valor de ciertos coeficientes, se denomina *método de coeficientes indeterminados*. Veamos a qué tipos de segundos miembros $b(t)$ de la ecuación (13) se aplica.

A) $b(t)$ es un polinomio

La ecuación (13) es, pues, de la forma

$$x'' + a_1x' + a_2x = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n \tag{21}$$

Si tenemos presente que la derivada de un polinomio es un polinomio de grado una unidad menor, es natural conjeturar la existencia de una solución particular de la ecuación (21) que sea también un polinomio de grado n:

$$x_p(t) = B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n \tag{22}$$

dado que, al sustituir en la ecuación (21), $x_p''(t)$ será un polinomio de grado $n-2$, $a_1x_p'(t)$ de grado $n-1$, y $a_2x_p(t)$ de grado n, lo que dará al sumar un polinomio de grado n.

Se tiene, al efectuar dicha sustitución,

$$\begin{aligned}[2B_2 + \cdots + n(n-1)B_nt^{n-2} + a_1[B_1 + 2B_2t + \cdots + nB_nt^{n-1}] + \\ + a_2[B_0 + B_1t + \cdots B_nt^n] = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n\end{aligned}$$

O sea,

$$\begin{aligned}(2B_2 + a_1B_1 + a_2B_0) + (2\cdot 3B_3 + 2a_1B_2 + a_2B_1)t + \ldots + \\ + (na_1B_n + a_2B_{n-1})t^{n-1} + a_2B_nt^n = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n\end{aligned} \tag{23}$$

Puesto que dos polinomios son iguales si, y sólo si, todos sus coeficientes son iguales, habrá de verificarse

$$\left\{\begin{aligned} a_2B_n &= b_n \\ na_1B_n + a_2B_{n-1} &= b_{n-1} \\ &\vdots \\ 2\cdot 3B_3 + 2a_1B_2 + a_2B_1 &= b_1 \\ 2B_2 + a_1B_1 + a_2B_0 &= b_0 \end{aligned}\right. \tag{24}$$

La primera de estas ecuaciones determina $B_n = b_n/a_2$, siempre que $a_2 \neq 0$. Con ese valor de B_n se obtiene de la segunda ecuación el valor de B_{n-1}, y así sucesivamente hasta la última ecuación para obtener B_{n-2}, ..., B_0. Queda así bien determinada una solución de la ecuación (21) de la forma (22). El proceso es viable, como vemos, si $a_2 \neq 0$. Si fuese $a_2 = 0$, no podríamos arrancar con la primera ecuación para determinar B_n. Ello no es de extrañar, ya que en este caso, al sustituir $x_p(t)$ dada por (22) en la ecuación (21), la expresión $x_p''(t) + a_1 x_p'(t)$ será un polinomio de grado $n - 1$, mientras que el segundo miembro es de grado n. Lo natural será proponer como solución un polinomio de grado $n + 1$

$$x_p(t) = t(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n) \tag{25}$$

Se plantea ya sin término independiente, pues la condición $a_2 = 0$ es equivalente a que $\lambda = 0$ sea autovalor de la ecuación homogénea asociada a (21), lo que implica que las funciones constantes son soluciones de dicha ecuación homogénea y, en consecuencia, al sustituirlas en (21) darán una contribución nula al primer miembro de (23).

Sustituyendo $x_p(t)$ dada por (25) en la ecuación (21), se obtiene, al igualar los coeficientes de las potencias iguales de t, un sistema de $n + 1$ ecuaciones que permite determinar unívocamente B_0, B_1, ..., B_n siempre que $a_1 \neq 0$.

Si, por último, $a_1 = a_2 = 0$, un razonamiento análogo nos llevaría a conjeturar la existencia de una solución particular de la forma

$$t^2(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n) \tag{36}$$

Pero en este caso no sería necesaria ninguna elaboración teórica, pues resolver la ecuación diferencial

$$x'' = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$$

se reduce a un problema simple de integración elemental. El conjunto de soluciones estaría dado por

$$x(t) = c_1 + c_2 t + \frac{b_0}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{b_1}{2 \cdot 3} t^3 + \cdots + \frac{b_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2}$$

Reconocemos en la expresión $c_1 + c_2 t$ la solución general de la ecuación homogénea asociada, en acuerdo con la fórmula (11) teniendo en cuenta que $\lambda = 0$ es autovalor doble; el otro sumando es una solución particular de la ecuación completa.

En resumen, la ecuación (21) tiene una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \begin{cases} B_0 + B_1 t + \cdots B_n t^n & \text{si} \quad a_2 \neq 0 \\ t(B_0 + B_1 t + \cdots B_n t^n) & \text{si} \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_1 \neq 0 \\ t^2(B_0 + B_1 t + \cdots B_n t^n) & \text{si} \quad a_1 = a_2 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

EJEMPLO 1. Resolver

$$x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + t - 1$$

La solución general de la ecuación homogénea está dada por (20), es decir,

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Habrá una solución particular de la forma

$$x_p(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p &= 2B_2 - 3(B_1 + 2B_2 t) + 2(B_0 + B_1 t + B_2 t^2) = \\ &= (2B_2 - 3B_1 + 2B_0) + (-6B_2 + 2B_1)t + 2B_2 t^2 = 2t^2 + t - 1 \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias diferentes de t:

$$2B_2 = 2 \quad , \quad B_1 = \frac{7}{2} \quad , \quad B_0 = \frac{15}{4}$$

Es decir, la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{15}{4} + \frac{7}{2}t + t^2$$

B) $b(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at}$

Este caso se reduce al anterior mediante el cambio de variable dependiente dado por

$$x(t) = e^{at}u(t)$$

En efecto, es inmediato comprobar que $x(t)$ es solución de

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at} \tag{29}$$

si, y sólo si, $u(t)$ es solución de

$$u'' + A_1 u' + A_2 u = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \tag{30}$$

donde

$$\begin{cases} A_1 = 2a + a_1 \\ A_2 = a^2 + a_1 a + a_2 \end{cases} \tag{31}$$

A la ecuación (30) se le aplica lo expuesto en el punto anterior. La condición $A_2 = a^2 + a_1 a + a_2 \neq 0$ significa que a no es autovalor del problema homogéneo, o, lo que es lo mismo, que e^{at} *no* es solución de la ecuación homogénea asociada. La condición $A_2 = 0$, $A_1 = 2a + a_1 \neq 0$ significa que a es autovalor simple, es decir, que e^{at} es solución de la ecuación homogénea pero que te^{at} no lo es. Y, finalmente, $A_2 = A_1 = 0$ significa que a es autovalor doble, o sea, que tanto e^{at} como te^{at} son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (29) (los autovalores, raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$$

si a es autovalor, que $a = -a_1/2$, o sea, $A_1 = 0$, es equivalente a que a sea autovalor doble).

De la fórmula (27) se tiene entonces que la ecuación (29) tiene una solución de la forma

$$x_p(t) = \begin{cases} (B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n) & \text{si } a \text{ no es autovalor} \\ t(B_0 + B_1 t + \cdots B_n t^n)e^{at} & \text{si } a \text{ es autovalor simple} \\ t^2(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n)e^{at} & \text{si } a \text{ es autovalor doble} \end{cases} \tag{32}$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$x'' - 3x' + 2x = (t - 1)e^{-t}$$

La solución de la ecuación homogénea es, como en el ejemplo 1:

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Aquí, -1 no es autovalor, con lo que habrá una solución particular de la forma

$$x_p(t) = (B_0 + B_1 t)e^{-t}$$

Sustituyendo:

$$e^{-t}(-2B_1 + B_0 + B_1 t) - 3e^{-t}(B_1 - B_0 - B_1 t) + 2e^{-t}(B_0 + B_1 t) = (t - 1)e^{-t}$$

o sea,

$$(-5B_1 + 6B_0) + (6B_1)t = t - 1$$

de donde

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad B_0 = \frac{-1}{36}$$

Así pues, la función

$$x_p(t) = \frac{1}{36}(-1 + 6t)e^{-t}$$

es una solución particular de la ecuación dada, siendo la solución general

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{36}(-1 + 6t)e^{-t}$$

Si el grado del polinomio del segundo miembro de (29) es $n \geqslant 2$, trae cuenta hacer el cambio (28) y determinar una solución particular $u_p(t)$ de (30), de acuerdo con (27), pues los cálculos de las derivadas serán claramente más sencillos. Y, desde luego, esto es lo que hay que hacer cuando a sea autovalor doble, pues en este caso la ecuación en $u(t)$ es simplemente

$$u'' = b_0 + b_1 t + \cdots b_n t^n$$

cuya solución general, como veíamos antes, se calcula inmediatamente por integración elemental.

C) $b(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at}$ **cos** bt, **o bien**
$b(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at}$ **sen** bt

Veamos cómo este caso se reduce al anterior. Como ya veíamos en el apartado 3.2, se puede extender la noción de solución de la ecuación (13) a funciones con valores complejos $z(t) = x(t) + iy(t)$, permitiendo incluso en la ecuación un segundo miembro $b(t)$ que sea también una función con valores complejos $b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$. Que $z(t)$ sea solución de la ecuación

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = b_1(t) + ib_2(t) \quad (a_1, a_2 \text{ reales}) \tag{33}$$

quiere decir que

$$[x''(t) + iy''(t)] + a_1[x'(t) + iy'(t)] + a_2[x(t) + iy(t)] = b_1(t) + ib_2(t) \tag{34}$$

lo cual es equivalente a que

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_2 x = b_1(t) \\ y'' + a_1 y' + a_2 y = b_2(t) \end{cases} \tag{35}$$

teniendo en cuenta que dos números complejos son iguales si, y sólo si, son iguales sus partes reales y sus partes imaginarias.

Supongamos entonces que

$$z_p(t) = x_p(t) + iy_p(t)$$

es una solución particular de la ecuación

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{\lambda t} \tag{36}$$

donde $\lambda = a + ib$ y, por tanto, $e^{\lambda t} = e^{at}$ (cos bt + i sen bt). Se tendrá entonces que $x_p(t) = \text{Re}\ \{z_p(t)\}$ satisface

$$x_p'' + a_1 x_p' + a_2 x_p = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at} \cos bt$$

y que $y_p(t) = \text{Im}\ \{z_p(t)\}$ satisface

$$y_p'' + a_1 y_p' + a_2 y_p = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{at} \text{ sen } bt$$

La solución particular $z_p(t)$ de (36) se calcula como en el caso anterior de acuerdo con (32), pues en el cálculo de los «coeficientes indeterminados», posiblemente complejos, no influye el hecho de que λ sea real o complejo (lo que está excluido, si λ es complejo, es que pueda ser autovalor doble).

EJEMPLO 3. Resolver

$$x'' - 4x' + 5x = te^{2t} \cos t$$

Se tiene que

$$te^{2t} \cos t = \text{Re}\ \{te^{(2+i)t}\}$$

Como $2 + i$ es autovalor, existirá, de acuerdo con (32), una solución particular de la ecuación

$$z'' - 4z' + 5z = te^{(2+i)t} \tag{37}$$

que es de la forma

$$z_p(t) = t(B_0 + B_1 t)e^{(2+i)t} \tag{38}$$

Sustituyendo en la ecuación (37):

$$[(2+i)^2 B_1 t^2 + (2+i)(4B_1 + (2+i)B_0)t + 2B_1 + 2(2+i)B_0] -$$
$$- 4[(2+i)B_1 t^2 + (2B_1 + (2+i)B_0)t + B_0] + 5[B_0 t + B_1 t^2] = t$$

Es decir,

$$0 \cdot t^2 + (4B_1 i)t + 2(B_1 + iB_0) = t$$

Con lo que ha de ser

$$4B_1 i = 1 \quad , \quad 2(B_1 + iB_0) = 0$$

En consecuencia,

$$B_1 = -\frac{i}{4} \quad , \quad B_0 = \frac{1}{4}$$

La solución particular de (38) es, pues,

$$z_p(t) = \frac{1}{4} t(1 - it)e^{(2+i)t} = \frac{1}{4} te^{2t}(1 - it)\,(\cos t + i \operatorname{sen} t) =$$

$$= \frac{1}{4} te^{2t}\,(\cos t + t \operatorname{sen} t) + i\frac{1}{4} te^{2t}\,(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

y la solución particular de la ecuación dada,

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\,\{z_p(t)\} = \frac{1}{4}\, te^{2t}\,(\cos t + t \operatorname{sen} t)$$

La solución general se obtendrá sumando a ésta la solución general de la ecuación homogénea:

$$x_h(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$$

Para resolver una ecuación (13') del tipo

$$Lu = b_1(t) + \cdots + b_r(t) \tag{39}$$

basta encontrar, por la linealidad del operador L, una solución particular $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, r$, para cada uno de los problemas

$$Lu = b_j(t) \quad , \quad j = 1, \ldots, r$$

pues, claramente, $\varphi_1(t) + \cdots + \varphi_r(t)$ será una solución particular de la ecuación (39).

Por ejemplo, para determinar una solución particular de la ecuación

$$x'' - 4x' + 5x = te^{2t} \cos t + 2e^t$$

se calcula una solución particular $\varphi_1(t)$ de

$$x'' - 4x' + 5x = te^{2t} \cos t$$

($\varphi_1(t)$ es la calculada en el ejemplo 3 precedente) y una solución particular $\varphi_2(t)$ de la ecuación

$$x'' - 4x' + 5x = 2e^t$$

($\varphi_2(t) = e^t$), y su suma será la solución buscada.

Los resultados de los puntos *A*), *B*) y *C*) anteriores se pueden resumir en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si el segundo miembro de la ecuación* $x'' + a_1x' + a_2x = b(t)$ *es de la forma*

$$b(t) = e^{at}[P_n(t) \cos bt + Q_m(t) \operatorname{sen} bt] \tag{40}$$

donde $P_n(t)$ *y* $Q_m(t)$ *representan polinomios de grado n y m respectivamente, entonces existe una solución particular de la forma*

$$x_p(t) = t^r e^{at}[\tilde{P}_k(t) \cos bt + \tilde{Q}_k(t) \operatorname{sen} bt] \tag{41}$$

donde $k = \text{máx}\ (m, n)$, $\tilde{P}_k(t)$ *y* $\tilde{Q}_k(t)$ *son polinomios de grado k de coeficientes indeterminados y r es la multiplicidad de* $\lambda = a \pm ib$ *como raíz de la ecuación característica* ($r = 0$ *significa que* $a \pm ib$ *no son raíces de dicha ecuación*).

En el caso del punto *C*) se puede buscar directamente una solución de la forma (41) sin necesidad de pasar a soluciones complejas. Así, en el ejemplo 3 anterior se buscaría una solución particular de la forma

$$x_p(t) = te^{2t}[(A + Bt) \cos t + (C + Dt) \operatorname{sen} t]$$

con *A*, *B*, *C* y *D* coeficientes (reales) a determinar. Si la ecuación fuese

$$x'' - 4x' + 5x = \cos t$$

se buscaría una solución de la forma

$$x_p(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

resultando, tras unos cálculos muy sencillos, $A = 1/8$, $B = -1/8$.

4.5. Aplicaciones: oscilaciones mecánicas y eléctricas. Economía

Imaginemos un resorte o muelle de longitud l sujeto verticalmente. Si se cuelga de él un objeto de masa m sufrirá un alargamiento Δl debido a la fuerza de la gravedad mg (Fig. 30*a* y *b*).

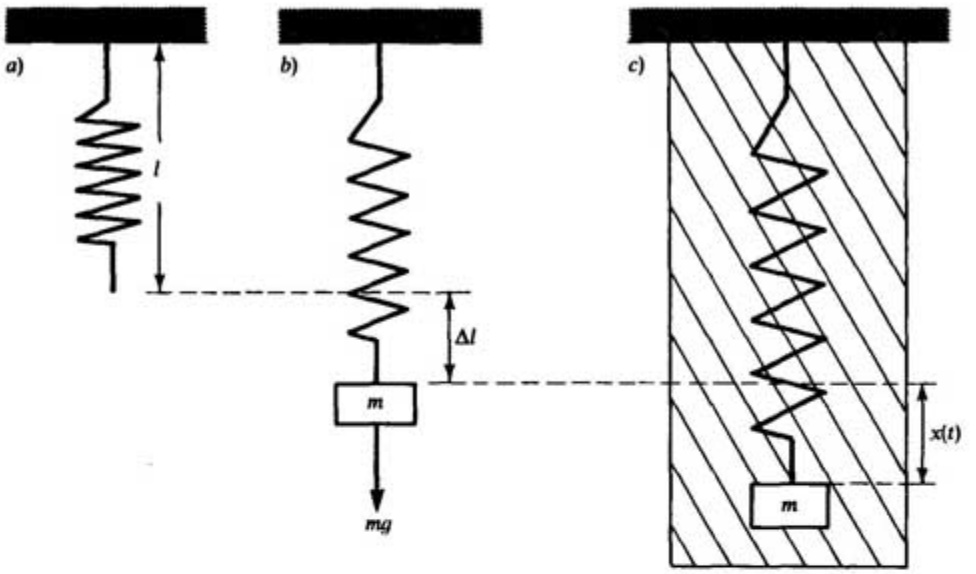


Figura 30

Hay entonces un *equilibrio estático* entre dicha fuerza y la fuerza que el resorte extendido ejerce sobre el objeto. La magnitud de ésta viene dada por la *ley de Hooke*, de acuerdo con la cual la magnitud de la fuerza que actúa sobre un cuerpo por parte de un resorte extendido (resp. contraído) es proporcional al alargamiento (resp. contracción) de éste y su sentido tal que el resorte tiende a recuperar su longitud normal. Esta fuerza recibe el nombre de fuerza de *restitución* o *recuperadora*.

Se tendrá, por tanto,

$$mg = k\Delta l \tag{1}$$

La constante positiva k mide la *rigidez* del resorte y dependerá del material del que esté construido (para un *peso* conocido $w = mg$, puede calcularse midiendo Δl; será $k = w/\Delta l$). Se acepta que la ley de Hooke es válida al menos si el alargamiento (o contracción) es muy pequeño frente a la longitud l del resorte [8].

Supongamos ahora que se desplaza el resorte de esa posición de equilibrio estático, se suelta (comunicándole eventualmente un impulso inicial) y se le aplica una fuerza externa descrita por $b(t)$. Se producirá entonces un movimiento del objeto, presentanto éste un desplazamiento $x(t)$, dependiente del tiempo, respecto a aquella posición de equilibrio (Fig. 30*c*).

---

[8] Son muy frecuentes los problemas físicos en los que existe una fuerza recuperadora dependiente de la posición de una partícula, que tiende a restituir ésta a su posición de equilibrio «estable», o sea, una posición tal que cuando la partícula sufre pequeños desplazamientos a partir de ella, surge una fuerza F que tiende a devolver la partícula a dicha posición de equilibrio. Si se supone que ésta es el punto $x = 0$ (en un medio unidimensional), la fuerza $F(x)$ verificará $F(0) = 0$ y signo $\{(F(x)\} = -\text{signo}\ (x)$, en un cierto entorno de $x = 0$. Se tendrá entonces, genéricamente, $F'(0) = -k < 0$, y $F(x) \cong F(0) + F'(0)x = -kx$, para $|x|$ pequeño. La ley de Hooke es, pues, una ley lineal que, para desplazamientos pequeños, aproxima a leyes no lineales más generales, aparte de que, para muchos materiales, da ella misma una gran precisión.

Se trata de describir los posibles movimientos sobre la base de la verificación de la segunda ley de Newton (Fuerza = Masa × Aceleración) en cada instante t del proceso.

Adoptamos el convenio de que fuerzas y desplazamientos son positivos si están dirigidos hacia abajo. Sobre la masa m actúan, en general, *cuatro* fuerzas cuya suma será la fuerza total que actúa sobre el objeto en cada instante t:

a) El peso mg que actúa hacia abajo y, por tanto, será siempre una fuerza positiva.

b) La fuerza *recuperadora*, proporcional al alargamiento o contracción y de sentido *opuesto* al desplazamiento (tendiendo así a restituir la posición de equilibrio estático). Será, pues, de la forma

$$-k(\Delta l + x), \quad \text{con} \quad k > 0$$

c) Una fuerza de *amortiguamiento* que el medio (el aire, simplemente, o aceite, en un mecanismo amortiguador) ejerce sobre la masa m, oponiéndose también al desplazamiento. Por razones experimentales, suele tomarse proporcional, en magnitud, a la magnitud de la velocidad del movimiento $|dx/dt|$, al menos, para valores pequeños de ésta. Así pues, será de la forma

$$-c\frac{dx}{dt}, \quad \text{con} \quad c > 0$$

[Se trata, de nuevo, de una ley lineal. En modelos más complejos podrá ser proporcional, con signo cambiado, a otra potencia de la velocidad distinta de uno.]

d) Una fuerza *externa* $b(t)$ aplicada a la masa, dependiente, en general, del tiempo y que será positiva o negativa, según que actúe hacia abajo o hacia arriba.

La segunda ley de Newton tomará entonces la forma de la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x) - c\frac{dx}{dt} + b(t) \tag{2}$$

O sea,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = b(t) \tag{3}$$

es decir, una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Los posibles movimientos del sistema físico considerado vendrán descritos por las soluciones de esta ecuación diferencial. Cada movimiento, o sea, cada solución de la ecuación (3), estará unívocamente determinado por los valores $x(0)$ y $(dx/dt)(0)$ que se prefijen como posición y velocidad iniciales de la masa m, de acuerdo con el teorema fundamental de existencia y unicidad para las ecuaciones lineales. La

descripción de los movimientos físicos, reales, por las funciones soluciones de la ecuación (3) es una descripción *aproximada* a causa de la validez también aproximada de la ley de Hooke y de la fórmula que se ha adoptado para la fuerza de amortiguamiento; además, se ha despreciado la masa del resorte frente a la masa m. Sin embargo, esas aproximaciones son bastante buenas para muchos materiales y situaciones, resultando de ello una descripción matemática de la realidad física suficientemente adecuada para gran número de aplicaciones.

La ecuación (3) sería también un modelo para oscilaciones horizontales de una masa conectada a un resorte análogo al anterior que se mueve sobre una superficie que opone una resistencia (debida al rozamiento) al desplazamiento (Fig. 31).

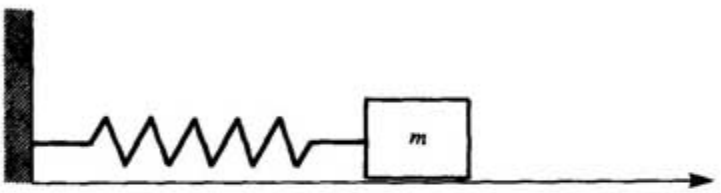


Figura 31

Asimismo, la ecuación (3) describe las oscilaciones pequeñas (véase la introducción) de un péndulo cuando se considera el rozamiento y la posible presencia de una fuerza externa.

Vamos a estudiar a continuación las soluciones de la ecuación (3) para distintas situaciones particulares.

A) Oscilaciones libres no amortiguadas

Corresponde esta situación al caso en que se supone que no se aplica fuerza externa y que no hay amortiguamiento, es decir, $b(t) \equiv 0$ y $c = 0$.

La ecuación (3) toma entonces la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4}$$

Los autovalores son $\lambda = \pm\sqrt{k/m} = \pm i\omega_0$, con $\omega_0^2 = k/m$, y, en consecuencia, las soluciones de (4) serán

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{5}$$

siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias que quedarán determinadas si se prescriben una posición y una velocidad iniciales, $x(0)$, $x'(0)$. El tipo de movimiento descrito por (5) se denomina *movimiento oscilatorio armónico*. Introduciendo las magnitudes constantes A y α dadas por

$$\begin{cases} A = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \\ c_1 = A \cos \alpha \quad , \quad c_2 = -A \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \tag{6}$$

la expresión (5) queda escrita en la forma

$$x(t) = A \cos (\omega_0 t + \alpha) \tag{7}$$

Como la función coseno es periódica de período 2π, vemos que todas las soluciones de la ecuación (4) son periódicas de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La *frecuencia*, número de oscilaciones por unidad de tiempo, es el número inverso del período, o sea, $\omega_0/2\pi$. La magnitud ω_0 es la *frecuencia angular*, y es la que se utiliza habitualmente en Física para caracterizar las oscilaciones, denominándola simplemente frecuencia.

Puesto que $-1 \leqslant \cos (\omega_0 t + \alpha) \leqslant 1$, el valor máximo del desplazamiento $x(t)$ será A, magnitud que recibe el nombre de *amplitud* de la oscilación. El valor de $x(t)$ variará entre $-A$ y A.

El argumento del coseno, $\omega_0 t + \alpha$, se denomina *fase* de la oscilación; α será la *fase inicial* (la fase correspondiente al instante $t = 0$).

Obsérvese que la frecuencia de la oscilación depende de las características físicas del sistema, concretamente de la rigidez, dada por k, y de la masa m. Un mismo cuerpo oscilando con distintas amplitudes, lo hace con la misma frecuencia (esto es característico de las oscilaciones lineales, o sea, soluciones de una ecuación lineal como (4)). La amplitud de las oscilaciones, por el contrario, no depende de aquellas características, sino de las condiciones iniciales (posición y velocidad) del movimiento (véase (6)). En la figura 32 se representa una solución típica de la ecuación (4) (las *trayectorias* del diagrama de fases del sistema equivalente serían, como sabemos, elipses en el plano (x, x'); el que sean curvas cerradas refleja la periodicidad de las soluciones).

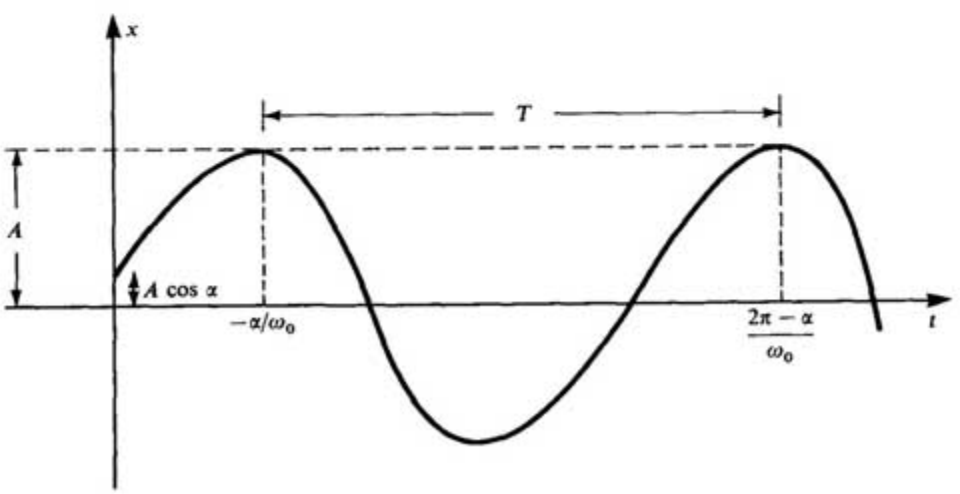


Figura 32

Si recordamos de la física elemental que el *trabajo* realizado por una fuerza constante a lo largo de un recorrido es igual al producto de dicha fuerza por el espacio que se recorre, e imaginamos, volviendo a la figura 30, que llevamos la masa m desde la posición de equilibrio, dada por $x = 0$, hasta una posición $\bar{x} \neq 0$, habremos realizado un trabajo *contra* la fuerza de restitución $-kx$, con x recorriendo el intervalo entre 0 y $\bar{x}$, que estará dado por

$$U(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} -(-kx)dx = k\frac{\bar{x}^2}{2} \tag{8}$$

Esta magnitud $U(\bar{x})$ recibe el nombre de *energía potencial* en el punto $\bar{x}$ de la partícula de masa m sometida al *campo de fuerzas* «estacionario» (no dependiente de t)

$$F(x) = -kx$$

[Obsérvese que $F(x) = -dU/dx$.]

Supongamos ahora que una partícula de masa m está en movimiento a lo largo de un eje Ox. La fuerza que actúa sobre la partícula en el instante t es, según la segunda ley de Newton,

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{9}$$

donde $v = dx/dt$ es la velocidad y $x(t)$ la posición en el instante t. El trabajo realizado por dicha fuerza desde la posición $x_1 = x(t_1)$ hasta la posición $x_2 = x(t_2)$ será, de nuevo,

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = m\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} v dv = \frac{1}{2}m[v(t_2)]^2 - \frac{1}{2}m[v(t_1)]^2 \tag{10}$$

o sea, igual a la variación de la magnitud

$$\frac{1}{2}mv^2 \tag{11}$$

Esta magnitud se denomina *energía cinética* de la partícula en el instante t.

La *energía total* (o energía, simplemente) es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{12}$$

o sea, la suma de la energía cinética más la potencial. La energía potencial depende de la posición y la cinética de la velocidad. En el caso presente de un movimiento armónico regido por la ecuación (4) se cumple la «ley de conservación de la energía»,

a saber, que la energía total (12) permanece constante a lo largo de cualquier movimiento. En efecto, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = v\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = 0$$

de acuerdo con (4). Utilizando (7) vemos que la energía E está dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2}kA^2$$

Obsérvese que la energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud y que las energías cinética y potencial varían, respectivamente, según $\operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \alpha)$ y $\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$, de modo que cuando una aumenta la otra disminuye, transformándose periódicamente la energía potencial en cinética, y viceversa.

B) Oscilaciones libres amortiguadas

Consideramos ahora el caso en que no se aplica fuerza externa pero sí se tiene en cuenta el amortiguamiento que produce la resistencia del medio al movimiento, es decir, $b(t) \equiv 0$ y $c > 0$. La ecuación (3) tomará la forma

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{13}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

y, por tanto, los autovalores están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}\right)$$

Se dan los tres casos siguientes:

a) $c^2 - 4km > 0$

Bajo esta condición, ambos autovalores son reales negativos y las soluciones están dadas por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{14}$$

Vemos que $\lim x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$ para todas las soluciones (14); la presencia de amortiguamiento ($c > 0$) hace que la masa m vuelva (tienda a volver, más precisamente) a la posición de equilibrio. Es más, en este caso no hay, en realidad, oscilaciones (véase el problema 13) y la masa m, desplazada de la posición de equilibrio a causa de unas condiciones iniciales $x(0)$ y $x'(0)$ no nulas simultáneamente, vuelve (tiende a volver) a dicha posición como «arrastrándose» debido al fuerte amortiguamiento: $c > 2\sqrt{km} = 2\omega_0 m$. Se dice, por ello, que el movimiento está *sobreamortiguado*. La figura 33 representa tres soluciones típicas (en el diagrama de fases del sistema plano equivalente, el origen es un nodo estable).

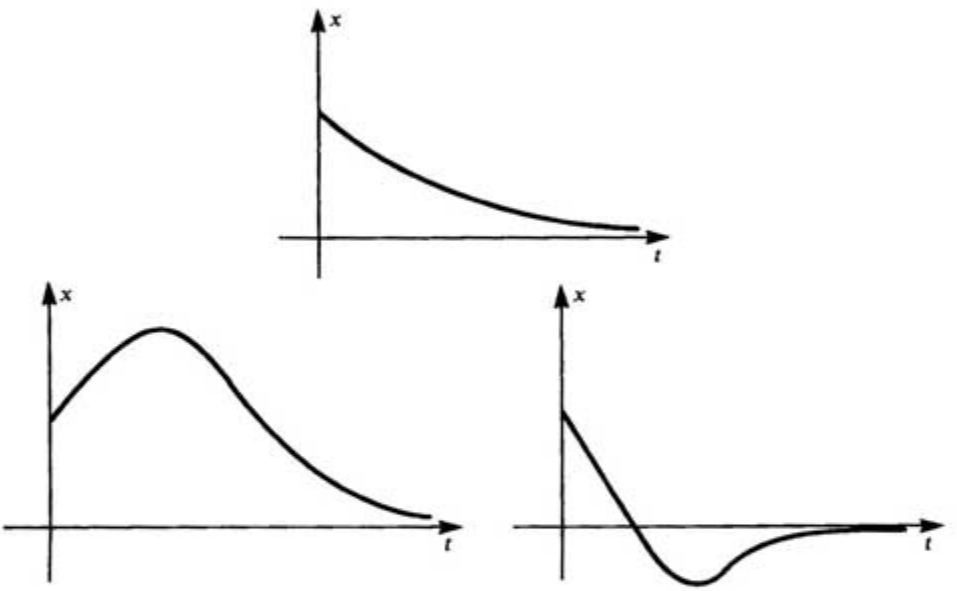


Figura 33

b) $c^2 - 4km = 0$

Hay en este caso un autovalor real doble, $\lambda = -c/2m$, y, por tanto, las soluciones están dadas por

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{c}{2m}t} \tag{15}$$

Se verifica también $\lim x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$ para todas las soluciones y éstas tienen las características descritas en el caso *a*) (véase el problema 13). El movimiento se dice que está *críticamente amortiguado:* $c = 2\sqrt{km}$. En el diagrama de fases del sistema plano equivalente, el origen es un modo impropio estable.

c) $c^2 - 4km < 0$

Los autovalores son ahora el par de números complejos conjugados

$$-\frac{c}{2m} \pm i\frac{(4km - c^2)^{1/2}}{2m}$$

con lo que las soluciones estarán dadas por

$$x(t) = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t) \tag{16}$$

donde $\mu = (4km - c^2)^{1/2}/2m > 0$.

Introduciendo las magnitudes A y α dadas por

$$\begin{cases} A = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \\ c_1 = A \cos \alpha, \quad , \quad c_2 = -A \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

la expresión (16) se transforma en

$$x(t) = e^{-(c/2m)t} \cos (\mu t + \alpha) \tag{17}$$

Aunque el movimiento no es propiamente periódico, sí tiene carácter oscilatorio. La *amplitud*, $Ae^{-(c/2m)t}$, es decreciente, el desplazamiento está comprendido entre las curvas $\pm Ae^{-(c/2m)t}$, y se puede definir un «cuasiperíodo» $T_a = 2\pi/\mu$ como el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos. Se tiene $\mu^2 = \omega_0^2 - (c/2m)^2$, es decir, la frecuencia de las oscilaciones (17) es menor (tanto menor cuanto mayor es el amortiguamiento medido por c) que la frecuencia *natural* o *propia* del sistema, ω_0 (o sea, la frecuencia de las oscilaciones cuando el sistema no está sometido a amortiguamiento ni a perturbaciones externas). En la figura 34 se muestra una solución típica (en el diagrama de fases del sistema plano equivalente, el origen es un foco estable). Como en los casos anteriores, todas las soluciones verifican $\lim x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$, pero, ahora, esa convergencia es, por así decirlo, más lenta, y se dice que el movimiento está *subamortiguado:* $c < 2\sqrt{km}$.

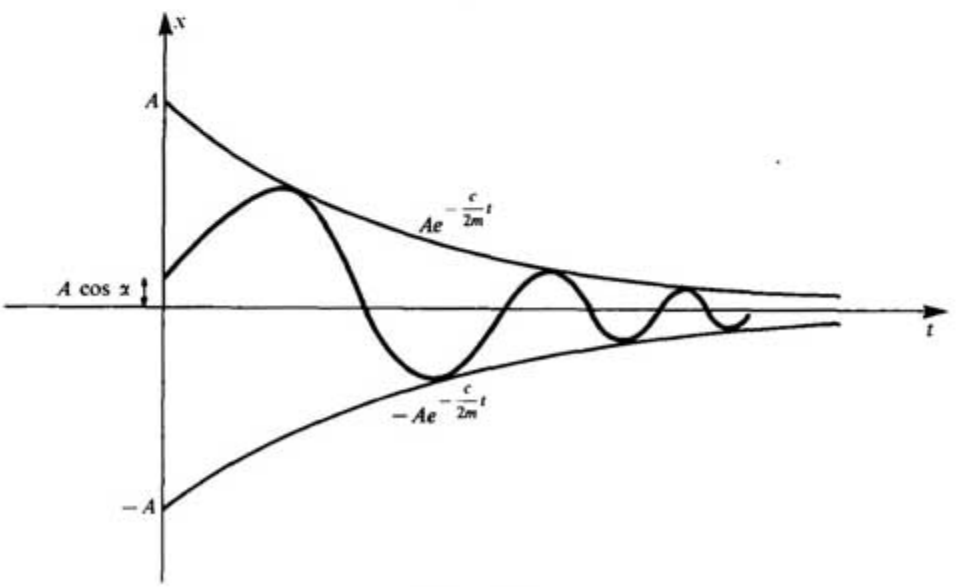


Figura 34

Hemos visto que en los tres casos la presencia de amortiguamiento implica que $\lim x(t) = 0$ cuando $t \to \infty$. Por la misma razón, ahora, la energía total *no* se conserva. En efecto, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kv\frac{dx}{dt} = v\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = \text{(por (13))} =$$

$$= -cv^2 \leqslant 0$$

es decir, $E(t)$ es decreciente. Lo que decrece en un intervalo $[t_1, t_2]$ es igual, claro, al trabajo que en ese intervalo realiza la fuerza de amortiguamiento $-cv$ (compruébese esto como ejercicio).

C) Oscilaciones forzadas

En cualquier proceso oscilatorio real está presente siempre algún tipo de amortiguamiento, por lo que las oscilaciones libres que puedan surgir en un cierto sistema se irán amortiguando a lo largo del tiempo según hemos visto en el párrafo precedente. Si se quieren conseguir oscilaciones *no* amortiguadas, habrá que compensar la pérdida de energía debida a la fuerza de amortiguamiento. Esto puede lograrse mediante fuentes externas al sistema; por ejemplo, aplicando una *fuerza externa* $b(t)$ que se supone ya de la forma

$$F_0 \cos \omega t \quad , \quad F_0 > 0$$

o sea, periódica de amplitud F_0 y frecuencia (angular) ω, con vistas a estudiar esa posibilidad de una «respuesta» oscilatoria no amortiguada del sistema (tal oscilación, provocada por esa fuerza externa, será una oscilación *forzada*). Se trata, pues, de estudiar la ecuación

$$mx'' + cv' + kv = F_0 \cos \omega t$$

o, equivalentemente,

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \tag{19}$$

La solución general de (19) vendrá dada por

$$x_h(t) + x_p(t) \tag{20}$$

donde $x_h(t)$ está dada por (14), (15) o (16), según como sean los autovalores de la ecuación característica asociada a (19), y $x_p(t)$ es una solución particular de (19). Utilizando el método de coeficientes indeterminados, se obtiene la solución particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \beta) \tag{21}$$

donde el ángulo β está definido por

$$\cos \beta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$
$$\text{sen } \beta = \frac{c\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{22}$$

Toda solución de la ecuación (19) aparece como suma de dos términos. El primero es una solución de la ecuación homogénea asociada a (19) y recoge la influencia de las condiciones iniciales; según hemos visto, converge a 0 cuando $t \to \infty$, con lo que dicha influencia decrece con el tiempo y a la larga se hará despreciable (la energía comunicada al sistema mediante las condiciones iniciales se va disipando a causa de la fuerza de amortiguamiento). El segundo término, dado por (21), representa un movimiento periódico de período $2\pi/\omega$, o sea, de frecuencia (angular) ω igual a la de la fuerza externa que se aplica, con un *desfase* respecto a ésta dado por β. Todas las soluciones de (19) convergen, para $t \to \infty$, a esta función periódica

$$\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \beta)$$

que, por ello, representará el comportamiento a largo plazo con el que el sistema responde a la perturbación externa representada por $F_0 \cos \omega t$. El primer término es el término *transitorio* y el segundo, la solución *permanente* o del *estado estable.*

4.5.1. El fenómeno de resonancia

La amplitud de la solución del estado estable vale

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{23}$$

Para m, k y c fijadas, $B = B(\omega)$ depende de un modo decisivo de la relación existente entre la frecuencia externa ω y la frecuencia propia o natural del sistema, ω_0. El valor máximo de $B(\omega)$ se corresponde con el valor mínimo de $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$, el cual se alcanza para la frecuencia

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}} \tag{24}$$

[obsérvese que existe ese máximo de $B(\omega)$ para un $\omega_1 > 0$ si $\omega_0^2 > c^2/2m^2$; esto implica que $\omega_0^2 > c^2/4m^2$, es decir, que el amortiguamiento es menor que el crítico.

Si fuese $\omega_0^2 \leqslant c^2/2m^2$, B alcanzaría su valor máximo para $\omega = 0$ —o sea, cuando se aplica una fuerza externa constante F_0 y no hay respuesta oscilatoria— y decrece en la semirrecta $\omega > 0$.]

Cuando $\omega = \omega_1$, se dice que la fuerza externa $F_0 \cos \omega_1 t$ está en *resonancia* con el sistema y el valor

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}$$

se dice que es la *frecuencia de resonancia* del sistema. Su valor es menor que la frecuencia de la oscilación libre amortiguada que, según vimos, valía $\mu = (\omega_0^2 - c^2/4m^2)^{1/2}$.

El valor máximo de la amplitud de la solución del estado estable será

$$B_{máx} = B(\omega_1) = \frac{F_0}{c\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{c^2}{4m^2}}} \tag{25}$$

Para m, k y F_0 fijados, el valor de $B_{máx}$ crece cuando c disminuye y, de hecho, $B_{máx} \to \infty$ cuando $c \to 0$. Las oscilaciones forzadas de un sistema con un amortiguamiento muy débil, incluso para valores de F_0 pequeños, pueden ser enormes. Esto explica la importancia del fenómeno de resonancia en la Física y en las aplicaciones técnicas. En ocasiones, es algo indeseable y hay que tratar de evitarlo. Es el caso de muchas oscilaciones mecánicas, y es la razón por la que siempre se ordena romper el paso a una formación militar que va a pasar un puente: se evita así aplicar una fuerza externa *periódica* que, aunque de pequeña magnitud, pudiese entrar en resonancia con el sistema elástico constituido por el puente, produciéndose, en consecuencia, unas oscilaciones forzadas de éste, que, aun siendo acotadas, podrían superar lo permitido por su límite elástico y provocar su ruptura [9].

Otras veces, lo que se busca es ampliar las oscilaciones y, entonces, la resonancia es un fenómeno deseable. Así, por ejemplo, puede interesar construir un sistema que detecte fuerzas periódicas de una frecuencia que se mueva en una banda estrecha alrededor de un cierto valor ω_1. Habrá entonces que elegir m, k y c, de modo que se cumpla lo más exactamente posible la ecuación (24) (es decir, de modo que ω_1 quede convertida en la frecuencia de resonancia y, en consecuencia, puedan ser detectadas las perturbaciones, incluso pequeñas, con una frecuencia ω_1 o próxima gracias a la amplificación que se produce en el sistema). Éste es el fundamento de los instrumentos que se utilizan para detectar movimientos de la corteza terrestre y la misma idea se aplica también en la detección de señales eléctricas en circuitos eléctricos.

---

[9] Los puentes son ejemplos tipicos de sistemas mecánicos oscilantes sometidos a fuerzas externas, no sólo como consecuencia del tránsito sobre ellos, sino también por el agua que actúa sobre los cimientos o el viento que sopla sobre su estructura. En ocasiones, esas fuerzas externas pueden tener un carácter periódico y llegar, a causa de la resonancia, a provocar el hundimiento. Un caso célebre es el de la destrucción del puente de Tacoma Narrows, en el estado de Washington, Estados Unidos, en 1940, producida por remolinos de viento que se formaban periódicamente a uno y otro lado de la calzada, con una frecuencia que entraba en resonancia con el puente. Véase Braun [1] para una narración de los hechos.

La gráfica de la función $B(\omega)$ se denomina *curva de resonancia* del sistema. Con m, k y F_0 fijadas, se tiene una curva de resonancia para cada valor $c > 0$ del coeficiente de amortiguamiento. A medida que c decrece (hacia 0), el valor de la frecuencia de resonancia ω_1 crece acercándose a la frecuencia natural ω_0, mientras que el valor $B_{máx} = B(\omega_1)$ se hace cada vez más grande (Fig. 35).

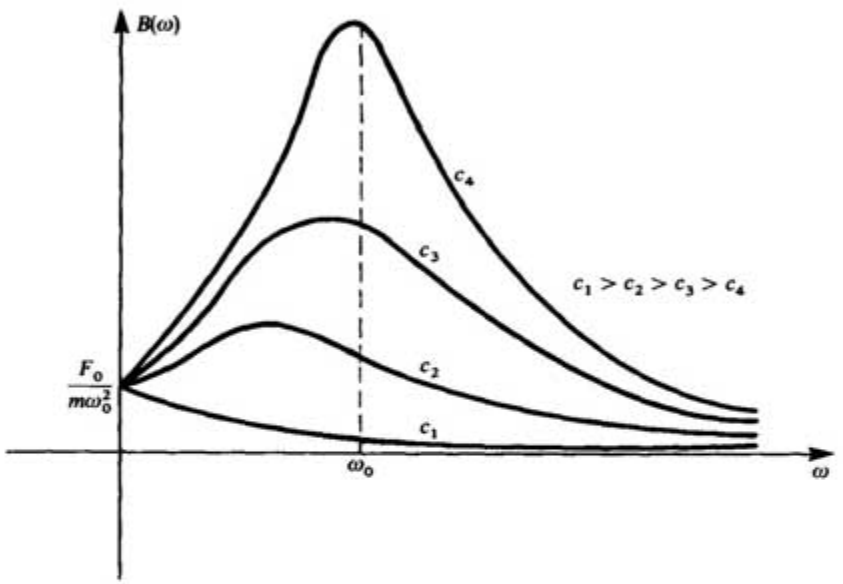


Figura 35

El caso límite, $c = 0$, requiere un tratamiento distinto. En efecto, en este caso

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

que no está definida para $\omega = \omega_0$, valor que habría de ser, de acuerdo con (24), la frecuencia de resonancia. Lo que ocurre para $c = 0$ y $\omega = \omega_0$ es que la ecuación (19) toma la forma

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \tag{26}$$

y como los autovalores de la ecuación característica asociada son $\pm i\omega_0$, no existe una solución particular de la forma (21). Hay que probar, de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, con una función de la forma

$$t(A \text{ sen } \omega_0 t + B \cos \omega_0 t)$$

obteniéndose la solución particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \text{ sen } \omega_0 t \tag{27}$$

con lo que la solución general de (26) vendrá dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (28)$$

Toda solución es, pues, la suma de un término periódico y un término oscilatorio de amplitud $(F_0/2m\omega_0)t$, *creciente* con t, que, a largo plazo, acabará dominando el movimiento del sistema (en la figura 36 se representa este término, que es la solución correspondiente a $c_1 = c_2 = 0$).

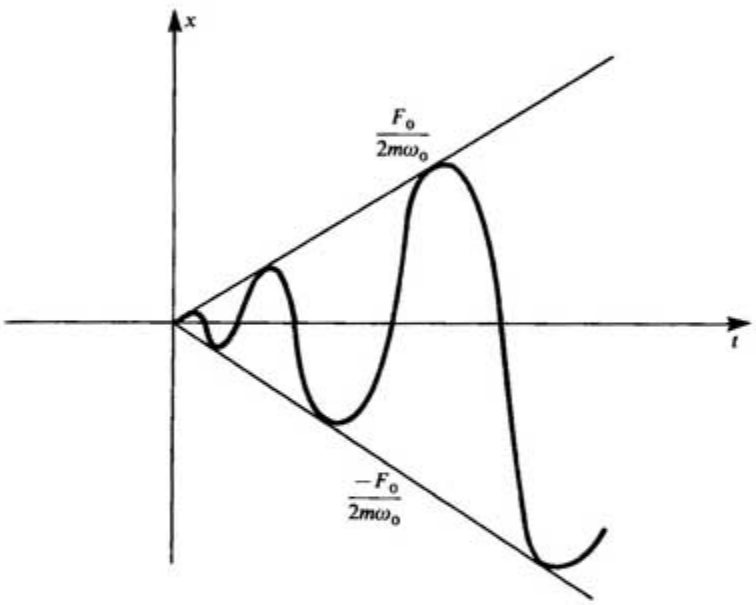


Figura 36

En concreto, $\lim |x(t)| = \infty$ cuando $t \to \infty$. Se dice, en este caso, que se tiene resonancia *pura* o *no amortiguada*. Es claro que el sistema se rompería para t grande cuando la frecuencia externa es igual a la frecuencia natural y el amortiguamiento es despreciable. En realidad, la ecuación (26) no regiría, para t grande, los movimientos del sistema, pues no se olvide que la ley de Hooke sobre la que hemos formulado la ecuación (26) es válida, en general, para desplazamientos pequeños.

4.5.2. Circuitos eléctricos

Hemos visto en el apartado 1.2 las nociones elementales relativas a circuitos eléctricos simples. Vamos a considerar aquí circuitos que constan de una fuente de fuerza electromotriz, una resistencia, una autoinducción (véase el apartado 1.2) y, además, un *condensador*. Un condensador es un dispositivo que almacena carga

eléctrica y consiste esencialmente en dos placas de material conductor separadas por un aislante. La carga Q acumulada por el condensador se opone a la entrada de carga adicional, produciéndose una caída de voltaje dada por

$$V_c = \frac{1}{C} Q$$

La constante C es la *capacitancia*, medida en *faradios* (Fig. 37).

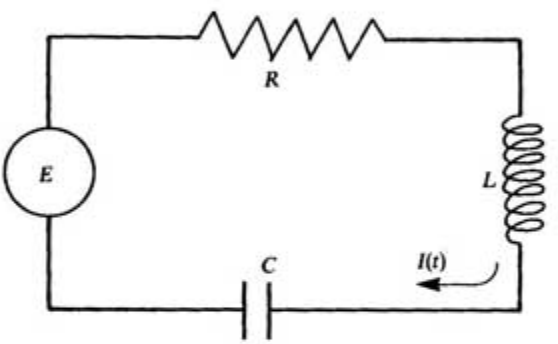


Figura 37

La segunda ley de Kirchhoff da, para este caso:

$$V_L + V_R + V_C = E$$

es decir,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E \tag{29}$$

Puesto que, por definición, $I = dQ/dt$, se obtiene de (29), bien una ecuación lineal de segundo orden en I (derivando respecto a t).

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt} \tag{30}$$

bien una ecuación lineal de segundo orden en Q:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E \tag{31}$$

Se aprecia la total analogía de estas ecuaciones con la ecuación (3) que rige las oscilaciones mecánicas. El paralelismo entre las magnitudes de los sistemas mecánicos y las de los eléctricos queda reflejado en el siguiente cuadro:

Desplazamiento x	$\leftrightarrow$	Carga Q en el condensador
Velocidad $x'(t)$	$\leftrightarrow$	Intensidad I
Masa m	$\leftrightarrow$	Inductancia L
Amortiguamiento c	$\leftrightarrow$	Resistencia R
Rigidez k	$\leftrightarrow$	Inversa de la capacitancia $1/C$
Fuerza aplicada $b(t)$	$\leftrightarrow$	Voltaje aplicado $E(t)$

Es claro entonces que podemos llevar a cabo para las oscilaciones en circuitos eléctricos el mismo análisis que hemos realizado para las oscilaciones mecánicas, con los correspondientes conceptos de frecuencia natural, amortiguamiento crítico, términos transitorio y permanente, resonancia, etc. La resonancia, en particular, es el fundamento, como se decía más arriba, de la utilización de circuitos eléctricos para amplificar señales eléctricas de baja intensidad (como se hace en radio).

4.5.3. Economía

En el apartado 1.2 formulábamos un modelo dinámico de mercado relativo a una única mercancía. Suponíamos que

$$\begin{cases} Q_d = & a - bP & , \quad a,\ b > 0 \\ Q_s = & -c + dP & , \quad c,\ d > 0 \end{cases} \tag{32}$$

Es decir, que las cantidades demandada y ofrecida de dicha mercancía dependían únicamente (de un modo lineal) del precio vigente P. Pero es lógico suponer que, en muchas ocasiones, tanto los compradores como los vendedores basen sus decisiones en el mercado, no sólo en el precio vigente P, sino también en la *tendencia* de dicho precio, la cual genera unas expectativas que influyen en la toma de decisiones de oferta y demanda. Esa tendencia estará reflejada en la derivada primera dP/dt (que da cuenta del crecimiento de P a lo largo del tiempo) y en la derivada segunda d^2P/dt^2 (que da cuenta del ritmo de ese crecimiento). Suponiendo entonces que Q_d y Q_s dependen también de dP/dt y d^2P/dt^2 y, como en (32), de un modo lineal, se tendrá

$$\begin{cases} Q_d = & a - bP + \alpha P' + \beta P'' \\ Q_s = & -c + dP + \gamma P' + \delta P'' \end{cases} \tag{33}$$

donde a, b, c y d son positivos como antes y α, β, γ, δ pueden tomar distinto signo según las circunstancias. Por ejemplo, si $\alpha > 0$, se tiene que Q_d crece cuando P está creciendo, lo que significaría que los compradores esperan que el precio continúe subiendo y prefieren comprar más ahora que más tarde con un precio más alto. Por

el contrario, $\alpha < 0$ significaría que esperan que la tendencia se invierta y prefieren posponer sus compras hasta que baje el precio.

Si admitimos además, como en el apartado 1.2, la ley de ajuste del precio a lo largo del tiempo

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_d - Q_s) \quad , \quad k > 0 \tag{34}$$

se tendrá, sustituyendo (33) en (34), la ecuación lineal de segundo orden

$$k(\beta - \delta)P'' + [k(\alpha - \gamma) - 1]P' - k(b + d)P + k(a + c) = 0 \tag{35}$$

Obsérvese que

$$\bar{P} = \frac{a + c}{b + d} \tag{36}$$

es la única solución constante. La solución general de la ecuación (35) vendrá dada por la suma de $\bar{P}$, precio de equilibrio estacionario, y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Estudiando el carácter de ésta, derivado de la naturaleza de los autovalores, que a su vez dependen de los parámetros a, b, c, d, α, β, γ, δ, se podrá establecer si $P(t)$ converge o no a $\bar{P}$ (con o sin fluctuaciones) cuando $t \to \infty$. [Hágase tal estudio para el caso particular en que $\gamma = \delta = 0$). (Véase [2] y [4] para otras aplicaciones a la Economía de las ecuaciones de segundo orden.]

PROBLEMAS

1. Resolver los problemas de valor inicial siguientes

a) $\begin{cases} x_1' = -6x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 1$

b) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 8x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = \frac{1}{3}$, $x_2(0) = \frac{1}{2}$

2. Probar que si $x(t)$ es solución de $x' = Ax$, también lo es $z(t) = x(t + \tau)$, con $\tau \in \mathbb{R}$. ¿Por qué no es esto cierto para los sistemas $x' = A(t)x$?

3. Esbozar los diagramas de fases de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las matrices A siguientes

$$a)\ \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad b)\ \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix} \quad ; \quad c)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -13 & 4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad ; \quad e)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad f)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -10 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad h)\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

4. Estudiar cómo varía el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x_1' = \mu x_1 + x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

al variar el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

5. Describir los diagramas de fases de los sistemas planos $x' = Ax$ para los que $\lambda = 0$ es autovalor de A.

6. Hallar la solución general y dibujar el diagrama de fases del sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[*Indicación*: Hágase un cambio de coordenadas apropiado, válido para cualquier sistema $x' = Ax + b$ con $\det A \neq 0$.]

7. Resolver los siguientes problemas de valor inicial

$$a)\ x'' - x' - 2x = 0 \quad ; \quad x(1) = 0 \quad , \quad x'(1) = 2$$
$$b)\ x'' - 2x' + 29x = 0 \quad ; \quad x(0) = 5 \quad , \quad x'(0) = 1$$
$$c)\ x'' - 3x' + 9x = 18 \quad ; \quad x(0) = 3 \quad , \quad x'(0) = 2$$

8. Sean a, b, c tres constantes positivas. Probar que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación

$$ax'' + bx' + cx = g(t)$$

donde $g(t)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, converge a cero cuando $t \to \infty$.

9. Resolver el siguiente «problema de contorno»

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \quad , \quad x(\infty) = 0 \end{cases}$$

10. Establecer la proposición 1 del apartado 4.4.

11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $x'' - x' - 2x = t^2 + 1$; *b)* $x'' - 5x' = 2t^3 + 1$

c) $x'' - x = 3t^2 e^t$; *d)* $x'' + 2x' + x = e^{-t}(t^4 + t^3 + t^2 + 1)$

e) $x'' - x = 3 \cos t - \operatorname{sen} t$; *f)* $x'' - 2x' + 5x = e^t(1 + \cos t)^2$

12. *a)* Probar que el cambio de variable independiente $t = e^s$ transforma la ecuación

$$a_0 t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_2 x = F(t)$$

(«ecuación de Euler») en una ecuación lineal con coeficientes constantes.

b) Hallar la solución general de

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + 2x = 3 \cos \ln t^2$$

13. *a)* Sea $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, con $t \geqslant 0$, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ y $|c_1| + |c_2| \neq 0$. Probar que tanto $x(t)$ como $x'(t)$ se anulan lo más una vez.

b) Sea $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$, con $t \geqslant 0$, $\lambda < 0$ y $|c_1| + |c_2| \neq 0$. Probar que tanto $x(t)$ como $x'(t)$ se anulan a lo más una vez.

14. Considérese el caso de oscilaciones forzadas, sin amortiguamiento. Probar que la solución correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ puede escribirse en la forma

$$x(t) = A(t) \operatorname{sen} \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

donde $A(t)$ es una función sinusoidal de frecuencia $(\omega_0 - \omega)/2$. [Si ω es muy próximo a ω_0, entonces $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$ y el movimiento resultante es una oscilación «rápida» de frecuencia $(\omega_0 + \omega)/2$, con una amplitud que varía sinusoidalmente con una frecuencia «denta» que vale $(\omega_0 - \omega)/2$. En acústica, se dice que se producen *pulsaciones:* imagínense dos diapasones de frecuencias naturales próximas que se hacen vibrar simultáneamente. Esbozar una representación gráfica del fenómeno.]

5 Sistemas lineales con coeficientes constantes III: el caso general

En el estudio de los sistemas lineales $x' = Ax$ quedan por resolver los casos en que $n > 2$ y se presentan autovalores repetidos (no siendo la matriz A simétrica).

Se podría atacar el problema de resolver los sistemas $x' = Ax$ generales siguiendo la estrategia del cambio de variables utilizada en los capítulos 3 y 4 para resolver determinados casos especiales, tratando de resolver explícitamente el problema $y' = By$ para una matriz B semejante a A pero «más simple» que la propia A. Se va a adoptar aquí, sin embargo, un punto de vista diferente que dará nueva luz sobre la estructura de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. A la hora del cálculo explícito de aquéllas, volverá a aparecer, de todas formas, la idea del cambio de variables, pues será necesario operar con una matriz B semejante a A que, como se decía, sea más simple que la propia A, y esto es, en realidad, equivalente a efectuar un cambio de variables.

El nuevo enfoque, de validez para todo sistema $x' = Ax$, se basa en la noción de *exponencial de una matriz* A, la cual será una matriz, denotada por e^A, con (casi) las mismas propiedades formales que la exponencial de números reales. Del mismo modo que las soluciones de la ecuación lineal escalar $x' = ax$, $a \in \mathbb{R}$, estaban dadas por

$$x(t) = e^{at}k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

las soluciones de $x' = Ax$ van a estar dadas por

$$x(t) = e^{At}k \quad , \quad k \in \mathbb{R}^n$$

En los apartados 5.1, 5.2 y 5.3 se define dicha exponencial y se estudian sus propiedades y la manera de calcularla explícitamente para obtener las soluciones de $x' = Ax$. En el apartado 5.4 se consideran las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes.

5.1. Exponencial de una matriz

Dado el sistema

$$x' = Ax \tag{1}$$

consideremos la matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema (1) que verifica $\Phi(0) = I$ (identidad en $\mathbb{R}^n$), es decir, la solución única del problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} X' = AX & \text{(ecuación matricial)} \\ X(0) = I \end{cases} \tag{2}$$

De acuerdo con la proposición 5 del apartado 2.3, se verifica que

a) la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{3}$$

es $x(t) = \Phi(t)x^0$.

b) $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

c) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

Pues bien, se tiene además la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de* (1) *tal que $\Phi(0) = I$, entonces*

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{4}$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos la demostración del teorema 1, apartado 2.2, de existencia y unicidad aplicada al PVI (2), cuya solución es $\Phi(t)$, vemos que las sucesivas iterantes de Picard (funciones matriciales)

$$X_0(t) = I \quad , \quad X_{k+1}(t) = I + \int_0^t AX_k(s)ds$$

son precisamente las sucesivas sumas parciales de la serie (4). En efecto:

$$X_1(t) = I + \int_0^t AIds = I + tA$$

$$X_2(t) = I + \int_0^t A(I + sA)ds = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!}$$

.....

$$X_k(t) = I + \int_0^t A\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^jA^j}{j!}\right)ds = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^jA^j}{j!}$$

Y recuérdese que la convergencia de las iterantes de Picard a la solución del problema de valor inicial ($\Phi(t)$ en este caso) es uniforme en cada intervalo cerrado y acotado.

En vista de la forma que tiene la serie (4), parece natural dar la siguiente definición:

Definición. *Se llama exponencial de la matriz A a la matriz* $e^A \equiv \exp A$ *definida por*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \Phi(1) \tag{5}$$

Con la nueva notación, la solución del PVI (3) toma, de acuerdo con la propiedad *a*) anterior, la forma

$$x(t) = e^{tA}x^0 \tag{6}$$

fórmula que generaliza la obtenida para el PVI relativo a la ecuación escalar $x' = ax$. A su vez, las propiedades *b*) y *c*) anteriores, junto con (2), dan, para la función $t \mapsto e^{tA}$,

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \tag{7}$$

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \quad \text{y} \quad e^{0A} = I \tag{9}$$

propiedades análogas a las bien conocidas de la función exponencial escalar $t \mapsto e^{at}$.

Las propiedades que caracterizan a la función exponencial escalar son:

$$\begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{a+b} = e^a e^b \text{ («regla de los exponentes»)} \end{cases}$$

La primera de ellas se cumple para la exponencial de matrices: $e^0 = I$, de acuerdo con (9). En cuanto a la segunda, $e^{A+B} = e^A e^B$, se cumple, como veremos a continuación, si las matrices A y B conmutan, no siendo válida, en general, la «regla de los exponentes» (véase problema 7).

Proposición 2. 1. *Si P es tal que* $AP = PB$, entonces

$$e^{tA}P = Pe^{tB}$$

2. *Si* $AB = BA$, *entonces, para todo* $t \in \mathbb{R}$,

a) $e^{tA}B = Be^{tA}$

b) $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$

DEMOSTRACIÓN. 1. De la hipótesis se tiene que

$$A^k P = PB^k$$

para todo entero positivo k. Si se tiene en el espacio vectorial de matrices $n \times n$, $\mathcal{M}(n)$ (identificable a $\mathbb{R}^{n^2}$), una sucesión convergente $C_N \to C$ y P es otra matriz de $\mathcal{M}(n)$, entonces:

$$C_N P \to CP \quad \text{y} \quad PC_N \to PC \ ^1$$

ya que

$$|CP - C_N P| = |(C - C_N)P| \leqslant |C - C_N||P| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

y análogamente en el otro caso. Entonces:

$$e^{tA}P = \left[\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)\right]P = \lim_{N\to\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)P\right] = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^kP}{k!} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kPB^k}{k!} = \lim_{N\to\infty} P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kB^k}{k!}\right) = Pe^{tB}$$

2. *a*) Se deduce de (1) eligiendo apropiadamente A, B y P.

b) Si se considera el PVI

$$\begin{cases} X' = (A + B)X \\ X(0) = I \end{cases}$$

cuya solución es $e^{t(A+B)}$, se comprueba que $e^{tA}e^{tB}$ también es solución. En efecto:

$$(e^{tA}e^{tB})' = (e^{tA})'e^{tB} + e^{tA}(e^{tB})' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (\text{por } a)) =$$
$$= Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A + B)e^{tA}e^{tB}$$

Por la unicidad de soluciones del problema de valor inicial habrá de ser $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

Corolario. *a*) *Si* $A = PBP^{-1}$, *entonces*

$$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$$

b) $e^{tA}A = Ae^{tA}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *En particular,*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

---

[1] O sea, la multiplicación, a derecha o izquierda, por una matriz fija P es una operación continua de $\mathcal{M}(n)$ en $\mathcal{M}(n)$.

c) *Si* $AB = BA$, *entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

EJEMPLO 1. Sea A una matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \cdots A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Y, por tanto,

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} + \cdots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \lambda_1^2/2! + \cdots + \lambda_1^k/k! + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n + \lambda_n^2/2! + \cdots + \lambda_n^k/k! + \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Asimismo,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

y reencontramos, de acuerdo con (6), el resultado ya conocido para la solución del PVI (3) cuando la matriz A es diagonal.

EJEMPLO 2. Si A es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

vimos (apartado 3.2) que la solución del PVI (3) era

$$x(t) = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}x^0$$

En consecuencia, por la unicidad de solución del problema (3) (o del (2)), tendremos que

$$\exp\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}t = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

resultado que se podría haber obtenido, naturalmente, de la propia definición, mediante la serie (5), de exponencial de una matriz (véase el problema 8).

EJEMPLO 3. Si $A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_m\}$, o sea, es una matriz construida con las submatrices $A_1, \ldots, A_m$ sobre la diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}$$

entonces, recordando cómo se efectúa la multiplicación de matrices, se tiene que

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^k \end{bmatrix}$$

y, de ahí:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & & & \\ & e^{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_m} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{e^{A_1}, \ldots, e^{A_m}\}$$

En consecuencia, si B es de la forma

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

se tendrá $\exp(Bt) =$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & & \\ & & & e^{a_1 t}\begin{pmatrix} \cos b_1 t & \operatorname{sen} b_1 t \\ -\operatorname{sen} b_1 t & \cos b_1 t \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{a_s t}\begin{pmatrix} \cos b_s t & \operatorname{sen} b_s t \\ -\operatorname{sen} b_s t & \cos b_s t \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

lo que da pleno sentido a la expresión (8) del apartado 3.2.

EJEMPLO 4. Sea la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

B se puede expresar como la suma $B = S + N$, siendo

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz S es diagonal y su exponencial se calcula de acuerdo a lo visto en el ejemplo 1. Por su parte, N verifica

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como se comprueba inmediatamente, con lo que la serie que define la exponencial exp (tN) se reduce a una suma finita:

$$\exp(tN) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, S y N conmutan, pues las matrices múltiplo de la identidad conmutan con cualquier otra, y, en consecuencia, por la proposición 2:

$$e^{Bt} = e^{St+Nt} = e^{St}e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

reencontrando así el resultado establecido en el apartado 4.1.

5.2. Cálculo de exp (At). Forma canónica de Jordan

La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{1}$$

está dada por

$$x(t) = e^{tA}x^0 \tag{2}$$

según vimos en el apartado anterior. Necesitamos, por tanto, realizar el cálculo de exp (tA) para resolver dicho problema (o, equivalentemente, hallar la solución general del sistema $x' = Ax$). Recurrir a la propia definición de exponencial de una matriz, tratando a llevar a cabo la suma de la serie correspondiente, llevaría, en el caso general, a cálculos irrealizables en la práctica. Es preciso abordar el problema de manera indirecta: consideremos, como ya es costumbre, un cambio de variables de la forma

$$x = Py$$

El problema (1) se transforma entonces en el problema equivalente

$$\begin{cases} y' = By \quad ; \quad B = P^{-1}AP \\ y(0) = P^{-1}x^0 \end{cases} \tag{3}$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{tB}P^{-1}x^0$$

La solución de (1) será, entonces:

$$x(t) = Py(t) = Pe^{tB}P^{-1}x^0$$

De donde, por la unicidad de solución, se deduce que:

$$e^{At}x^0 = Pe^{tB}P^{-1}x^0$$

Y esto para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con lo que

$$e^{At} = Pe^{tB}P^{-1} \tag{4}$$

resultado que ya conocemos por el corolario a la proposición 2 del apartado anterior.

Convendrá, entonces, realizar un cambio de variables, o, equivalentemente, encontrar una matriz no singular P, tal que el cálculo de exp (Bt) sea más sencillo que el de exp (At). Si A es diagonalizable, existe P tal que

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(por ejemplo, si A tiene n autovalores reales distintos o si A es simétrica). En este caso

$$e^{At}x^0 = P^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Px^0$$

expresión que ya conocíamos como solución del PVI (1) (véase el apartado 3.1). Lo mismo cabe decir en el caso en que A tiene autovalores distintos, reales o complejos, de acuerdo con lo visto en el apartado 3.2 y el ejemplo 3 del apartado anterior.

Pero, como sabemos, no toda matriz es diagonalizable, ni aun pasando a $\mathbb{C}$. El resultado final del esfuerzo en pos del objetivo «ideal» [2] de diagonalizar una matriz es la *forma canónica de Jordan*; se trata de una matriz «casi diagonal» que es semejante a la matriz dada A y que en el caso de matrices 2×2 pudimos determinar en todos los casos. Se tiene, para el caso general, el siguiente teorema debido a Jordan [3].

Teorema 1. *Sea A una matriz $n \times n$ con s autovectores linealmente independientes. Entonces, existe una matriz no singular P tal que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{bmatrix} = B$$

[2] Ideal, al menos, para el cálculo de la exponencial de una matriz, como se aprecia en el ejemplo 1 del apartado anterior.

[3] Camille Jordan, matemático francés, 1838-1922.

Cada bloque de Jordan B_j, $j = 1, ..., s$, es una matriz triangular de la forma

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

donde λ_k es autovalor de la matriz A. Un autovalor λ_k puede aparecer en varios bloques si corresponde a varios autovectores linealmente independientes.

La matriz $B = P^{-1}AP$ se denomina *matriz de Jordan*, o *forma canónica de Jordan* de A. Salvo en el orden de los bloques de Jordan, B está unívocamente determinada por A, y dos matrices semejantes tienen la misma forma canónica. Los bloques correspondientes a un mismo autovalor λ («λ-bloques de Jordan») se sobreentiende que están dispuestos consecutivamente sobre la diagonal principal de B, con el criterio de que su tamaño sea decreciente (no creciente, propiamente). Por ejemplo,

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|cc|c} 3 & 1 & & & & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & & & \\ \hline & & & 3 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & & & 3 & 1 & & & & \\ & & & & & & 3 & & & & \\ \hline & & & & & & & 3 & & & \\ \hline & & & & & & & & i & 1 & \\ & & & & & & & & & i & \\ \hline & & & & & & & & & & i \end{array}\right] \tag{5}$$

Nótese cómo también es un λ-bloque de Jordan la matriz 1×1 (λ). Si $s = n$, es decir, si A posee n autovectores linealmente independientes, entonces A es diagonalizable: su forma canónica de Jordan es una matriz diagonal (todos los bloques B_j son 1×1). Imaginemos un bloque B_j de dimensión $n_j \times n_j$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es, obviamente,

$$(\lambda - \lambda_k)^{n_j}$$

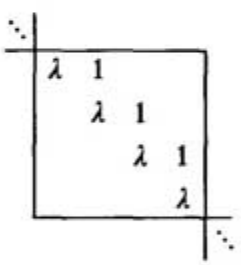
es decir, B_j tiene a λ_k como único autovalor de multiplicidad (algebraica) n_j. Por otro lado,

$$\det (B - \lambda I) = \det (B_1 - \lambda I) \ldots \det (B_s - \lambda I)$$

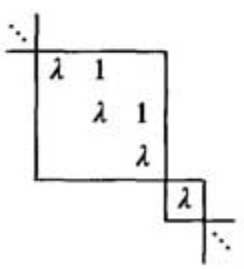
de donde queda patente que los autovalores de una matriz de Jordan son precisamente los elementos de su diagonal principal (como ocurre en cualquier matriz triangular, por lo demás) y que un autovalor aparece en esa diagonal tantas veces como indique su multiplicidad (algebraica). Y como dos matrices semejantes poseen los mismos autovalores, por eso, según dice el enunciado del teorema, los autovalores de A aparecen en los bloques B_j que forman su matriz de Jordan. En el ejemplo (5), 3 es un autovalor de multiplicidad 8 e i un autovalor de multiplicidad 3. [Una matriz A cuya forma canónica de Jordan fuese (5) no puede tener todos sus elementos reales. ¿Por qué?]

Como hemos dicho, un autovalor λ de A de multiplicidad m aparece m veces en la diagonal principal de la forma canónica de Jordan de A, es decir, «contribuye» con m filas y m columnas a dicha forma canónica. La contribución puede tener lugar de diversas maneras. Por ejemplo, un autovalor λ de multiplicidad 4 puede dar lugar a:

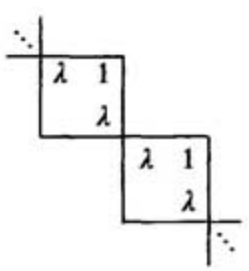
— Un bloque 4 × 4:



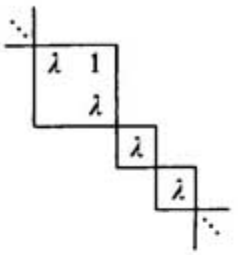
— Un bloque 3 × 3 y un bloque 1 × 1:



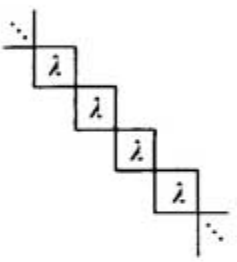
— Dos bloques 2 × 2:



—Un bloque 2×2 y dos bloques 1×1:



—O bien, cuatro bloques 1×1:



En el próximo apartado describiremos cómo se obtiene la forma canónica de Jordan de una matriz A, así como la matriz de paso P, y cómo ello se aplica al cálculo explícito de las soluciones del sistema $x' = Ax$. De todos modos, ese cálculo explícito no es, en muchas ocasiones, lo más interesante. Directamente del teorema 1 (resultado propio de un curso de álgebra lineal y que no demostraremos aquí; véase (5), o bien, (6) u (8)) se puede obtener la *forma* que tienen las soluciones de $x' = Ax$ y, a partir de esa forma, propiedades *cualitativas* que pueden tener mayor interés que el propio conocimiento explícito de dichas soluciones (se tratará esta cuestión ampliamente en el capítulo 6).

Según hemos visto antes,

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1} \tag{6}$$

Así que, dejando ahora de lado la determinación de P, necesitamos calcular exp (Bt). Como se mostraba en el ejemplo 2 del apartado anterior, se tendrá, para una matriz de Jordan:

$$e^{Bt} = \text{diag}\,\{e^{B_1 t}, \ldots, e^{B_s t}\} \tag{7}$$

Basta, pues, calcular exp $(B_j t)$ para un bloque de Jordan

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Para ello, la observación clave (véase el ejemplo 4 del apartado anterior) es la siguiente: B_j se puede escribir como la suma

$$B_j = S + N$$

con

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

de dos matrices que conmutan (las matrices múltiplo de la identidad conmutan con cualquier otra), con lo que es aplicable la «regla de los exponentes» y

$$e^{B_j t} = e^{St} e^{Nt} \tag{8}$$

Como ya sabemos,

$$e^{St} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \tag{9}$$

mientras que N tiene la siguiente particularidad:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(los unos se han desplazado a la segunda paralela a la diagonal principal)

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{n_j-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, los unos, al obtener las sucesivas potencias, se van desplazando a las sucesivas paralelas a la diagonal principal, y, finalmente,

$$N^h = 0$$

para $h \geqslant n_j$ (se dice que N es una matriz *nilpotente* de orden n_j).

Por consiguiente:

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n_j-1)!}N^{n_j-1}t^{n_j-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! & \cdots & t^{n_j-1}/(n_j-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n_j-2}/(n_j-2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & t^3/3! \\ & & & & & t^2/2 \\ & & & & & t \\ 0 & 0 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

es decir, la serie infinita que define e^{Nt} se reduce a una suma finita bastante simple. Reuniendo, entonces, (6), (7), (8), (9) y (10) se tendría calculada e^{At} (a reserva de determinar una matriz de paso P) y, con ella, las soluciones del sistema $x' = Ax$, cualquiera que fuese la matriz A de elementos *complejos*. Las soluciones obtenidas serían todas las funciones de t *con valores complejos* que satisfacen $x' = Ax$. Como ya hemos señalado anteriormente, la matriz A es, en los casos que más interesan en las aplicaciones, de elementos reales, e interesan asimismo las *soluciones reales* de $x' = Ax$. La dificultad del método anterior, basado en la forma canónica de Jordan, estriba, como ya sabemos por los casos estudiados en el capítulo 3, en que hay matrices de elementos reales que tienen autovalores complejos; para ellas, el método anterior lleva inevitablemente a la introducción de soluciones complejas (aparecen números complejos en la diagonal de B y en la matriz de paso P). Conviene, entonces, para una matriz A real, o sea, de elementos reales, utilizar la *forma canónica real.*

Teorema 2. *Sea A una matriz $n \times n$ real. Existe una matriz real no singular P tal*

que $P^{-1}AP = B$ es una matriz compuesta diagonalmente por bloques, bien de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad o \quad (\lambda) \tag{11}$$

con λ autovalor real de A, o bien de la forma

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & O & \cdots & O \\ O & D & I_2 & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & D & I_2 \\ O & \cdots & & & D \end{bmatrix} \quad o \quad D \tag{12}$$

siendo

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

con $a + bi$, $b > 0$, autovalor complejo de A. Los autovalores reales, con multiplicidad, aparecen sobre la diagonal principal, y cada bloque D, con $b > 0$, aparece tantas veces como indique la multiplicidad (algebraica) del autovalor $a + bi$, $b > 0$.

Esa matriz B es la *forma canónica real* de A. Está unívocamente determinada por A (salvo el orden de los bloques diagonales) y dos matrices semejantes tienen la misma forma canónica real. Si A tiene sólo autovalores reales, B es, naturalmente, la forma canónica de Jordan. De ésta deriva, en el caso general, la forma canónica real por un procedimiento análogo al realizado en el apartado 3.2, con algunas complicaciones técnicas (hay que entreverar previamente, en la forma canónica de Jordan, los bloques análogos —de la misma dimensión— correspondientes a un autovalor $a + bi$ y a su conjugado $a - bi$, y en las correspondientes columnas de la matriz de paso P sustituir los vectores sucesivos w y $\bar{w}$ por los vectores reales Re w e Im w).

Para calcular exp (Bt), basta, como antes, considerar el caso en que B sea un bloque de la forma (11) ó (12). El primer caso es el resuelto antes, así que basta considerar el caso de un bloque $2n_j \times 2n_j$:

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & & & O \\ O & D & I_2 & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & D & I_2 \\ O & \cdots & & & D \end{bmatrix} = S + N$$

Donde

$$S = \begin{bmatrix} D & O & O & \cdots & O \\ O & D & O & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & D & O \\ O & \cdots & & & D \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} O & I_2 & O & \cdots & O \\ O & O & I_2 & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & O & I_2 \\ O & \cdots & & & O \end{bmatrix}$$

Como antes, las matrices S y N conmutan, con lo que

$$e^{Bt} = e^{St}e^{Nt} \tag{14}$$

Pero, de acuerdo con lo visto en los ejemplos 2 y 3 del apartado anterior,

$$e^{St} = e^{at} \begin{bmatrix} R & O & O & \cdots & O \\ O & R & O & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & R & O \\ O & \cdots & & & R \end{bmatrix}$$

donde R es la matriz rotación

$$R = \begin{bmatrix} \cos bt & \text{sen } bt \\ -\text{sen } bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

mientras que, análogamente también a lo anterior, la matriz N $2n_j \times 2n_j$ es nilpotente de orden n_j:

$$N^2 = \begin{bmatrix} O & O & I_2 & & \cdots & O \\ O & O & O & I_2 & \cdots & O \\ O & \cdots & & & & I_2 \\ O & \cdots & & & & O \\ O & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix} \cdots N^{n_j-1} = \begin{bmatrix} O & O & O & & \cdots & I_2 \\ O & O & O & O & \cdots & O \\ O & \cdots & & & & O \\ O & \cdots & & & & O \\ O & \cdots & & & & O \end{bmatrix}$$

y N^h es ya la matriz cero para $h \geqslant n_k$. Por tanto,

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} R & Rt & Rt^2/2 & Rt^3/3! & \cdots & Rt^{n_j-1}/(n_j-1)! \\ 0 & R & Rt & Rt^2/2 & \cdots & Rt^{n_j-2}/(n_j-2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & Rt^3/3! \\ & & & & & Rt^2/2 \\ & & & & & Rt \\ 0 & 0 & & \cdots & & R \end{bmatrix} \tag{15}$$

Con estos resultados, planteémonos de nuevo la resolución de la ecuación $x' = Ax$. Si P es una matriz no singular tal que $P^{-1}AP = B$ es la forma canónica real de A, realizamos al cambio de variables

$$x = Py$$

En las variables y, el sistema toma la forma

$$y' = By \tag{16}$$

donde $B = \text{diag}\,\{B_1, ..., B_p\}$, siendo los bloques B_j, $j = 1, ..., p$, de la forma (11) o (12), asociados, respectivamente, a autovalores reales λ o complejos no reales $\lambda = a \pm ib$, de la matriz A. El sistema (16) queda desacoplado en subsistemas, cada uno de ellos correspondiente a un bloque B_j y, consecuentemente, a un determinado autovalor de A. De acuerdo con (9), (10) y (15), se tendrá para las coordenadas de las soluciones de esos subsistemas:

Si λ es real, cada coordenada $y_j(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^l e^{\lambda t} \quad , \quad l = 0, 1, ..., m(\lambda) - 1 \tag{17}$$

siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad (algebraica) del autovalor [4] λ.

Si $\lambda = a + bi$, $b > 0$, cada coordenada $y_j(t)$ es una combinación lineal de las funciones

$$t^l e^{at} \cos bt \quad , \quad t^q e^{at} \operatorname{sen} bt \quad , \quad 0 \leqslant l, q \leqslant m(\lambda) - 1 \tag{8}$$

siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad (algebraica) del autovalor [5] $a + ib$, $b > 0$.

---

[4] Con más precisión, $l \leqslant \mu - 1$, siendo μ el tamaño del correspondiente bloque, el cual, en todo caso, es menor o igual que la multiplicidad del autovalor, según se deduce de la estructura de la forma canónica.

[5] Análogamente, $l, q \leqslant \mu - 1$, siendo 2μ el tamaño del bloque considerado.

Al deshacer el cambio de variables, $x = Py$, tendremos que las coordenadas de las soluciones $x(t)$ de $x' = Ax$ serán combinaciones lineales de las funciones descritas en (17) y (18), con λ recorriendo los autovalores de A. En resumen, se tiene el siguiente

Teorema 3. *Sea $x(t)$ una solución de $x' = Ax$, siendo A una matriz real $n \times n$. Entonces, cada una de las coordenadas de $x(t)$ es una combinación lineal de las funciones*

$$t^l e^{at} \cos bt \quad , \quad t^q e^{at} \operatorname{sen} bt \tag{19}$$

donde $\lambda = a + ib$, recorre los autovalores de A con[6] *$b \geqslant 0$, y l y q son enteros tales que, para cada λ, $0 \leqslant l, q \leqslant m(\lambda) - 1$* [7]*, siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad (algebraica) de λ. En otros términos,*

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=1}^{r} (c_k^1 + c_k^2 t + \cdots + c_k^{m_k} t^{m_k - 1}) e^{a_k t} \cos b_k t + \\ + \sum_{k=1}^{r} (d_k^1 + d_k^2 t + \cdots + d_k^{m_k} t^{m_k - 1}) e^{a_k t} \operatorname{sen} b_k t \end{aligned} \tag{20}$$

para una cierta elección de los vectores constantes c_k^l, d_k^q, y siendo $\lambda_k = a_k + ib_k$, $k = 1, \ldots, r$, los autovalores de A con $b_k \geqslant 0$, con multiplicidades m_k, $k = 1, \ldots, r$, respectivamente.

Como señalábamos antes, este resultado no da por sí mismo la forma explícita de las soluciones (se necesita para ello la matriz de paso P, según se explica en el apartado siguiente) pero ya permite establecer resultados cualitativos sobre las soluciones muy interesantes. Por ejemplo, es fácil probar que si todos los autovalores de A son tales que su parte real es negativa, entonces

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

para toda solución de $x' = Ax$. [En el capítulo 6 se tratarán con detalle estas cuestiones.]

También es evidente el siguiente resultado cualitativo.

Teorema 4. *Las coordenadas de cualquier solución de $x' = Ax$ son funciones con derivadas continuas de cualquier orden.*

---

[6] Nótese que con $b = 0$ se cubren los autovalores reales.

[7] Con mayor precisión, l y q son, para cada autovalor λ, menores que el tamaño del mayor λ-bloque de la forma de Jordan de A.

A pesar de lo dicho antes, la fórmula (20) permite desarrollar un «método de coeficientes indeterminados» para encontrar explícitamente las soluciones de $x' = Ax$.

EJEMPLO. Hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz son $\lambda = 1$ doble y $\lambda = 2$. Las soluciones tendrán, por tanto, la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} te^t + 2 \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} e^t +$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} K_1 + L_1 \\ K_2 + L_2 \\ K_3 + L_3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 2M_1 \\ 2M_2 \\ 2M_3 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 4K_1 + 2K_2 - 4K_3 \\ 2K_1 + 3K_2 - 3K_3 \\ 3K_1 + 2K_2 - 3K_3 \end{bmatrix} e^t +$$

$$+ \begin{bmatrix} 4L_1 + 2L_2 - 4L_3 \\ 2L_1 + 3L_2 - 3L_3 \\ 3L_1 + 2L_2 - 3L_3 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 4K_1 + 2K_2 - 4K_3 \\ 2K_1 + 3K_2 - 3K_3 \\ 3K_1 + 2K_2 - 3K_3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Igualando los coeficientes de las correspondientes exponenciales, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_1 + L_1 &= 4K_1 + 2K_2 - 4K_3 \quad , \quad L_1 = 4L_1 + 2L_2 - 4L_3 \\ K_2 + L_2 &= 2K_1 + 3K_2 - 3K_3 \quad , \quad L_2 = 2L_1 + 3L_2 - 3L_3 \\ K_3 + L_3 &= 3K_1 + 2K_2 - 3K_3 \quad , \quad L_3 = 3L_1 + 2L_2 - 3L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2M_1 &= 4M_1 + 2M_2 - 4M_3 \quad , \\ 2M_2 &= 2M_1 + 3M_2 - 3M_3 \quad , \\ 2M_3 &= 3M_1 + 2M_2 - 3M_3 \quad , \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{array}{lll} K_2 \text{ arbitrario} & , \quad L_2 \text{ arbitrario} & , \quad M_2 \text{ arbitrario} \\ K_1 = 2(L_2 + K_2) & , \quad L_1 = 2L_2 & , \quad M_1 = M_2 \\ K_3 = L_2 + 2K_2 & , \quad L_3 = 2L_2 & , \quad M_3 = M_2 \end{array}$$

En consecuencia, la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(L_2 + K_2) \\ K_2 \\ L_2 + 2K_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 2L_2 \\ L_2 \\ 2L_2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} M_2 \\ M_2 \\ M_2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Se aprecia, de todos modos, que este método resulta muy engorroso en cuanto la dimensión n es mínimamente alta.

5.3. Cálculo de la forma canónica de una matriz

En este apartado expondremos las reglas para determinar la forma canónica de una matriz así como la matriz de paso P, analizando en detalle, para empezar, el caso $n = 3$ y dando después las pautas de trabajo, sin demostraciones rigurosas, para el caso general.

La forma canónica de una matriz A depende, como se ha dicho, de la naturaleza de los autovalores de A. Veamos uno por uno todos los casos posibles para una matriz A 3×3.

A) La matriz A tiene tres autovalores distintos λ_1, λ_2 y λ_3

Entonces A es diagonalizable y su matriz de Jordan es precisamente la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(cada autovalor sólo puede dar lugar a un bloque de Jordan 1×1).

Como sabemos (véase el apartado 3.1), la matriz de paso P está formada, por columnas, por tres autovectores v^1, v^2 y v^3, correspondientes, respectivamente, a λ_1, λ_2 y λ_3. Puede ocurrir que dos de los autovalores sean números complejos, por ejemplo, $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = a - ib$ $(b > 0)$. En este caso interesa, como se ha dicho, utilizar la *forma canónica real* de A en lugar de la inicial matriz de Jordan. Para ello basta construir una *nueva* matriz P que tenga la misma primera columna de antes v^1 mientras que (véase el apartado 3.2) $v^2 = \text{Re } w$, $v^3 = \text{Im } w$, siendo w un autovector (complejo) de λ_2, para tener que

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & a & b \\ & -b & a \end{array}\right] \tag{2}$$

Ya sabemos resolver la ecuación $x' = Ax$ tanto si $B = P^{-1}AP$ es de la forma (1), con todos los autovalores reales, como si es de la forma (2) (apartado 3.2).

B) La matriz A tiene dos autovalores distintos λ_1, λ_2, siendo λ_2 doble

En este caso, los autovalores son necesariamente reales, pues los complejos aparecen por parejas de conjugados, y se pueden presentar dos posibles formas canónicas de Jordan:

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 & \\ \hline & & \lambda_2 \end{array}\right] \quad \text{o} \quad B_2 = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 & 1 \\ & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \tag{3}$$

según que a λ_2 le correspondan dos bloques 1×1 o un bloque 2×2. Observemos que

$$\text{rango } (B_1 - \lambda_2 I) = 1 \quad \text{y} \quad \text{rango } (B_2 - \lambda_2 I) = 2$$

Pero si $B = P^{-1}AP$, también se tiene

$$(B - \lambda I) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

y, como dos matrices semejantes tienen el mismo rango, se tendrá el siguiente criterio:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad r(A - \lambda_2 I) = 1 \quad , & \text{la forma canónica de } A \text{ es } B_1 \\ \text{Si} \quad r(A - \lambda_2 I) = 2 \quad , & \text{la forma canónica de } A \text{ es } B_2 \end{cases} \tag{4}$$

Puesto que $\dim N(A - \lambda_2 I) = 3 - r(A - \lambda_2 I)$, podemos reformular el criterio así:

$$\dim N(A - \lambda_2 I) = \text{Número de } \lambda_2\text{-bloques en la matriz de Jordan de } A \tag{5}$$

En el caso de B_1, dim $N(A - \lambda_2 I) = 2$, es decir, existen dos autovectores linealmente independientes correspondientes a λ_2, v^2 y v^3, que, junto a un autovector v^1 de λ_1, permiten construir una matriz no singular P, de modo que $P^{-1}AP = B_1$. La matriz A es diagonalizable pues estamos, en realidad, en la situación del teorema 1 del apartado 3.1 (compruébese que, efectivamente, v^1, v^2 y v^3 así elegidos son vectores linealmente independientes).

En el caso de B_2, dim $N(A - \lambda_2 I) = 1$ y no existen dos autovectores linealmente independientes correspondientes a λ_2. La matriz de paso

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

se determina tomando como primera columna v^1 un autovector de λ_1, como v^2 un autovector de λ_2 y v^3 se determina mediante el sistema

$$(A - \lambda_2 I)v^3 = v^2$$

[Compruébese que los vectores v^1, v^2 y v^3 así elegidos son linealmente independientes. Véase el apartado 4.1 y también el caso *C*) siguiente.]

EJEMPLO 1. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$ es

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ doble. Se tiene:

$$\text{rango}\,(A - 2I) = \text{rango} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} = 1$$

con lo que dim $N(A - 2I) = 3 - 1 = 2$ y la forma canónica de A es la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 5 & -5 \\ 7 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Es decir, la misma que antes. Los autovalores son, pues, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ doble. Se tiene, en este caso:

$$\text{rango } (A - 2I) = \text{rango} \begin{bmatrix} 8 & 10 & -14 \\ 3 & 3 & -5 \\ 7 & 8 & -12 \end{bmatrix} = 2$$

con lo que dim $N(A - 2I) = 3 - 2 = 1$, el autovalor $\lambda_2 = 2$ proporciona un solo bloque de dimensión 2×2 a la forma canónica y ésta es, por tanto,

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

En cuanto a la resolución del sistema $x' = Ax$, se aplica lo visto en el apartado anterior, aunque para ambos casos de matriz de Jordan sabíamos ya resolver dicho sistema: en el primer caso, A es diagonalizable y ya lo resolvimos en el apartado 3.1, y en el segundo, determinando una matriz de paso P como se ha indicado, se haría el cambio de variables $x = Py$ y, utilizando los argumentos desarrollados en el apartado 4.1, llegaríamos a

$$x(t) = P \left[\begin{array}{c|cc} e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

para la solución general de $x' = Ax$, y

$$x(t) = P \left[\begin{array}{c|cc} e^{\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right] P^{-1} x^0 \tag{7}$$

para la solución del problema de valor inicial

$$x' = Ax \quad , \quad x(0) = x^0$$

C) La matriz A tiene un autovalor triple λ

Caben en este caso tres posibles formas canónicas de Jordan

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad B_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \tag{8}$$

según que a λ corresponda 3, 2 ó 1 bloques de Jordan. Observemos que

$$\begin{aligned} &\text{rango } (B_1 - \lambda I) = 0 \\ &\text{rango } (B_2 - \lambda I) = 1 \\ &\text{rango } (B_3 - \lambda I) = 2 \end{aligned}$$

Como recordábamos antes, dos matrices semejantes tienen el mismo rango, con lo que se tendrá el siguiente criterio:

$$\begin{aligned} &\text{Si } r(A - \lambda I) = 0, \text{ la forma canónica de } A \text{ es } B_1 \\ &\text{Si } r(A - \lambda I) = 1, \text{ la forma canónica de } A \text{ es } B_2 \\ &\text{Si } r(A - \lambda I) = 2, \text{ la forma canónica de } A \text{ es } B_3 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\dim N(A - \lambda I) = 3 - r(A - \lambda I)$$

podemos reformular ese criterio así:

$$\dim N(A - \lambda I) = \text{Número de } \lambda\text{-bloques en la matriz de Jordan de } A \tag{9}$$

Es el mismo resultado que (5) del caso anterior *B)*.

Si la forma canónica fuese $B_1 = \lambda I$ se tendría

$$A = P(\lambda I)P^{-1} = (\lambda I)PP^{-1} = \lambda I$$

es decir, A *ya era* la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

y no había, en realidad, necesidad de ningún cálculo.

Si la matriz de Jordan es B_2, la matriz de paso P se construiría del siguiente modo:

Escribamos la ecuación $P^{-1}AP = B_2$ en la forma

$$AP = PB_2$$

Entonces:

$$AP = A\begin{bmatrix} | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Av^1 & Av^2 & Av^3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

mientras que

$$PB_2 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda v^1 & v^1 + \lambda v^2 & \lambda v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Habrá de ser, por tanto:

$$\begin{aligned} Av^1 &= \lambda v^1 \\ Av^2 &= v^1 + \lambda v^2 \\ Av^3 &= \lambda v^3 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{cases} (A - \lambda I)v^1 = 0 \\ (A - \lambda I)v^2 = v^1 \\ (A - \lambda I)v^3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Para determinar tres vectores v^1, v^2 y v^3 que satisfagan (10), y que además sean linealmente independientes, se procede de la siguiente manera: de la primera y segunda ecuaciones de (10) vemos que v^2 ha de satisfacer

$$(A - \lambda I)^2 v^2 = 0 \tag{11}$$

Observemos que

$$(A - \lambda I)^2 = (P(B_2 - \lambda I)P^{-1})(P(B_2 - \lambda I)P^{-1}) = P(B_2 - \lambda I)^2 P^{-1}$$

con lo que

$$\mathrm{r}(A - \lambda I)^2 = \mathrm{r}(B_2 - \lambda I)^2 = \mathrm{r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

es decir, $N(A - \lambda I)^2 = \mathbb{R}^3$ y es posible encontrar un vector $v^2 \in \mathbb{R}^3 = N(A - \lambda I)^2$ que *no* sea autovector de λ (o sea, que no esté en $N(A - \lambda I)$, que es de dimensión 2 y, por tanto, estrictamente más pequeño que todo $\mathbb{R}^3 = N(A - \lambda I)^2$). Con un tal v^2 calculamos

$$v^1 = (A - \lambda I)v^2$$

v^1 es autovector correspondiente a λ, ya que

$$(A - \lambda I)v^1 = (A - \lambda I)^2 v^2 = 0$$

y $v^1 \neq 0$, pues de lo contrario sería $(A - \lambda I)v^2 = 0$, es decir, v^2 sería autovector de λ, en contra de la elección de v^2.

Finalmente, se elige para v^3 un autovector de λ que sea linealmente independiente con ese v^1, lo cual es posible ya que dim $N(A - \lambda I) = 2$. Así elegidos, v^1, v^2 y v^3 son linealmente independientes, ya que si tiene una ecuación de la forma

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0 \tag{12}$$

resulta, al aplicar la matriz $(A - \lambda I)$ a ambos miembros de (12),

$$\alpha_2 v^1 = 0$$

de donde $\alpha_2 = 0$, lo que, junto a (12), implica que también $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ por haber sido elegidos v^1 y v^3 linealmente independientes.

[*Ejercicio*: Aplicar este mismo método en el caso *B*) anterior cuando la forma canónica es B_2.]

EJEMPLO 3. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$\det (A - \lambda I) = (3 - \lambda)^3$$

Así pues, $\lambda = 3$ es un autovalor triple. Se tiene

$$\mathrm{r}(A - 3I) = \mathrm{r} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Por tanto, la forma canónica es

$$B = = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right]$$

Para determinar una matriz de paso P, identifiquemos en primer lugar el espacio propio correspondiente a $\lambda = 3$, es decir, el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$(A - 3I)x = 0$$

Se trata de los vectores tales que

$$x_2 = 0$$

Tomamos entonces para v^2, por ejemplo, el vector

$$v^2 = (0, 1, 0)$$

que, palmariamente, *no* es autovector de $\lambda = 3$. Entonces:

$$v^1 = (A - 3I)v^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y para v^3 podemos tomar, por ejemplo,

$$v^3 = (0, 0, 1)$$

Así pues,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estudiemos finalmente el caso en que la forma canónica es

$$B_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

Desarrollando, como antes, la ecuación $AP = PB$:

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Av^1 & Av^2 & Av^3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda v^1 & v^1 + \lambda v^2 & v^2 + \lambda v^3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = PB$$

Habrá de ser, por tanto:

$$\begin{aligned} Av^1 &= \lambda v^1 \\ Av^2 &= v^1 + \lambda v^2 \\ Av^3 &= v^2 + \lambda v^3 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{cases} (A - \lambda I)v^1 = 0 \\ (A - \lambda I)v^2 = v^1 \\ (A - \lambda I)v^3 = v^2 \end{cases} \tag{13}$$

Hay, pues, que encontrar tres vectores v^1, v^2 y v^3 que satisfagan (13) y que sean linealmente independientes. Para ello, es necesario que

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^2 v^2 &= 0 \\ (A - \lambda I)^3 v^3 &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que $\mathrm{r}(A - \lambda I) = \mathrm{r}(B_3 - \lambda I) = 2$, según vimos, y que

$$\mathrm{r}(A - \lambda I)^2 = \mathrm{r}(B_3 - \lambda I)^2 = r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

y

$$\mathrm{r}(A - \lambda I)^3 = \mathrm{r}(B_3 - \lambda I)^3 = r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Así pues, se tiene la cadena de contenidos estrictos

$$\underset{(\dim = 1)}{N(A - \lambda I)} \subset \underset{(\dim = 2)}{N(A - \lambda I)^2} \subset \underset{(\dim = 3)}{N(A - \lambda I)^3} = \mathbb{R}^3$$

(si M es una matriz y x es un vector tal que $Mx = 0$, es claro que $M^2x = 0$).

Elegimos entonces un vector $v^3 \in \mathbb{R}^3 = N(A - \lambda I)^3$ que *no* esté en $N(A - \lambda I)^2$. Ponemos entonces:

$$v^2 = (A - \lambda I)v^3$$

donde $v^2 \neq 0$, pues $v^3 \notin N(A - \lambda I)$; además, $(A - \lambda I)v^2 \neq 0$, es decir, v^2 *no* es autovector de λ, ya que si fuese $(A - \lambda I)v^2 = 0$, se tendría:

$$(A - \lambda I)^2 v^3 = (A - \lambda I)(A - \lambda I)v^3 = (A - \lambda I)v^2 = 0$$

contra la elección de v^3. Se pone entonces

$$v^1 = (A - \lambda I)v^2$$

y v^1 es autovector, ya que

$$(A - \lambda I)v^1 = (A - \lambda I)^2 v^2 = (A - \lambda I)^3 v^3 = 0$$

Así elegidos, v^1, v^2 y v^3 son linealmente independientes, pues, si se tiene una ecuación de la forma

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0 \tag{14}$$

al aplicar $(A - \lambda I)$ a ambos miembros se obtendría

$$\alpha_2 v^1 + \alpha_3 v^2 = 0 \tag{15}$$

Aplicando de nuevo $(A - \lambda I)$ a (15) se tendría

$$\alpha_3 v^1 = 0$$

de donde $\alpha_3 = 0$, lo que, sustituyendo en (15), implica que también $\alpha_2 = 0$. Finalmente, de (14) se sigue que también $\alpha_1 = 0$.

EJEMPLO 4. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$\det (A - \lambda I) = -\lambda^3$$

Así pues, $\lambda = 0$ es autovalor triple. Se tiene $r(A - 0 \cdot I) = r(A) = 2$, por lo que la forma canónica de A es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar una matriz de paso P necesitamos conocer A^2 y A^3:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(esto último ya se sabe sin necesidad de ningún cálculo, pues ha de ser $r(A^3) = 0$).

Como v^3, se ha de tomar un vector de $\mathbb{R}^3$ que *no* esté en $N(A - \lambda I)^2$, es decir, que no satisfaga la ecuación

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Tomemos, por ejemplo, $v^3 = (1, 0, 0)$. Entonces,

$$v^2 = (A - 0 \cdot I)v^3 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y

$$v^1 = Av^2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Obsérvese que $Av^1 = (0, 0, 0)$.)

Así pues,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

En cuanto a la resolución del sistema $x' = Ax$, se aplica el procedimiento explicado en el apartado precedente. De acuerdo con lo que señalábamos en el caso anterior *B*), la única situación realmente nueva se presenta cuando la forma canónica de A es

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{16}$$

pues en los otros dos casos el sistema, después de hacer el cambio de variables $x = Py$, puede desacoplarse en ecuaciones uni y bidimensionales que ya sabíamos resolver (apartados 3.1 y 4.1).

Realizando, como de costumbre, el cambio de variables $x = Py$, se obtiene el sistema en las nuevas variables y:

$$y' = By \tag{17}$$

con B dada por (16). Para calcular $\exp(Bt)$ hay que tener presente que B es un

bloque de Jordan que, como exponíamos en el apartado anterior, se puede expresar como la suma $B = S + N$, con

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de dos matrices que conmutan, con lo que es aplicable la «regla de los exponentes» y

$$e^{Bt} = e^{St}e^{Nt}$$

Como vimos:

$$e^{St} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & e^{\lambda t} & \\ & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

y

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consecuentemente, la solución general de (17) será:

$$y(t) = e^{Bt}K = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & e^{\lambda t} & \\ & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} =$$

$$e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Deshaciendo el cambio de variables, tendremos que la solución general de $x' = Ax$ es:

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & (t^2/2)e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Así, con la matriz A del ejemplo 4 anterior, se tendrá:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

O sea,

$$\begin{cases} x_1(t) = 2k_1 + 6k_2 + k_3 + (2k_2 + 6k_3)t + k_3t^2 \\ x_2(t) = k_1 + 2k_2 + (k_2 + 2k_3)t + \dfrac{1}{2}k_3t^2 \\ x_3(t) = 2k_1 + 5k_2 + (2k_2 + 5k_3)t + k_3t^2 \end{cases}$$

5.3.1. El caso general

Sea ahora una matriz real A, $n \times n$, con autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_r$, de multiplicidades $m_1, ..., m_r$, respectivamente. Para cada λ_k, $k = 1, ..., r$, vamos a considerar la matriz

$$A - \lambda_k I$$

Se tiene

$$\mathrm{r}(A - \lambda_k I) = \mathrm{r}(B - \lambda_k I)$$

siendo B la matriz de Jordan de A.

De manera general, si una matriz M es de la forma

$$M = \mathrm{diag}\ \{M_1, ..., M_s\}$$

entonces

$$\mathrm{r}(M) = \mathrm{r}(M_1) + \cdots + \mathrm{r}(M_s)$$

y, consiguientemente, si M_j es de dimensión $n_j \times n_j$, siendo $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$:

$$\dim N(M) = n - \mathrm{r}(M) = \sum_{j=1}^{s} n_j - \sum_{j=1}^{s} \mathrm{r}(M_j) = \sum_{j=1}^{s} (n_j - \mathrm{r}(M_j) = \sum_{j=1}^{s} \dim N(M_j)$$

Como

$$B - \lambda_k I = \mathrm{diag}\ \{B_1 - \lambda_k I_{n_1}, ..., B_s - \lambda_k I_{n_s}\}$$

siendo $n_j \times n_j$, $j = 1, ..., s$, la dimensión del bloque elemental B_j, se tendrá

$$\mathrm{r}(B - \lambda_k I) = \mathrm{r}(B_1 - \lambda_k I_{n_1}) + \cdots + \mathrm{r}(B_s - \lambda_k I_{n_s})$$

Las submatrices $B_j - \lambda_k I$, con B_j un bloque elemental correspondiente a λ_k son de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n_j \\ \downarrow \end{matrix}$$
$$\longleftarrow n_j \longrightarrow$$

con lo que, claramente, se tiene para ellas:

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I_{n_j}) = n_j - 1$$

Por su parte, las submatrices $B_j - \lambda_n I_{n_j}$ con B_j un bloque correspondiente a un autovalor de A λ distinto de λ_k son de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda - \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda - \lambda_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n_j \\ \downarrow \end{matrix}$$
$$\longleftarrow n_j \longrightarrow$$

con lo que, al ser $\lambda - \lambda_k \neq 0$:

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I_{n_j}) = n_j$$

En consecuencia,

$$\mathrm{r}(B - \lambda_k I) = n - (\text{Número de bloques elementales correspondientes a } \lambda_k) \quad (18)$$

Es decir,

$$\dim N(B - \lambda_k I) = \text{Número de bloques elementales correspondientes a } \lambda_k \quad (19)$$

Y como el número

$$\mathrm{r}(B - \lambda_k I) = \mathrm{r}(A - \lambda_k I)$$

se puede calcular a partir de la matriz dada A, ya se tiene un primer dato sobre la estructura de su forma canónica. Ahora bien, como sabemos, ese número total de bloques elementales correspondientes a un autovalor λ_k puede repartirse según distintas configuraciones. Para determinar completamente la forma canónica de Jordan de una matriz A necesitaremos, pues, conocer, para cada uno de sus autovalores λ_k, los números

$$\nu_l(\lambda_k) = \text{Número de bloques elementales de dimensión } l \times l \text{ correspondientes a } \lambda_k$$

donde $1 \leqslant l \leqslant m_k = \text{Multiplicidad de } \lambda_k$.

Esos números $v_l(\lambda_k)$ se obtienen a partir de los números

$$\delta_l(\lambda_k) = \dim\ N(B - \lambda_k I)^l = \dim\ N(A - \lambda_k I)^l$$

los cuales pueden calcularse a partir de la matriz A. Ya hemos visto en (19) que

$$\delta_1(\lambda_k) = v_1(\lambda_k) + v_2(\lambda_k) + \cdots + v_{m_k}(\lambda_k) \tag{20}$$

Calculemos $\delta_2(\lambda_k)$:

$$(B - \lambda_k I)^2 = \text{diag}\ \{(B_1 - \lambda_k I_{n_1})^2, \ldots, (B_s - \lambda_k I_{n_s})^2\}$$

y, entonces,

$$\mathrm{r}(B - \lambda_k I)^2 = \mathrm{r}(B_1 - \lambda_k I_{n_1})^2 + \cdots + \mathrm{r}(B_s - \lambda_k I_{n_s})^2$$

En primer lugar, las submatrices $(B_j - \lambda_k I_{n_j})^2$ con B_j un bloque elemental correspondiente a un autovalor λ distinto de λ_k, son matrices triangulares con $(\lambda - \lambda_k)^2 \neq 0$ en todas las posiciones de la diagonal principal, por lo que, para ellas,

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = n_j$$

Consideremos ahora las submatrices $(B_j - \lambda_k I_{n_j})^2$ con B_j un bloque elemental correspondiente a λ_k. Si B_j es de dimensión 1×1, es decir, de la forma (λ_k), entonces:

$$(B_j - \lambda_k I_{n_j}) = (0) = (B_j - I_{n_j})^2$$

y se tendrá:

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = 0 = n_j - 1$$

(aquí, $n_j = 1$). Si B_j es de dimensión 2×2:

$$(B_j - \lambda_k I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (B_j - \lambda_k I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y se tendrá

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = 0 = n_j - 2$$

(aquí, $n_j = 2$). Si B_j es de dimensión 3×3:

$$(B_j - \lambda_k I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = 1 = n_j - 2$$

(aquí, $n_j = 3$). Si B_j es de dimensión $n_j \times n_j$, con $n_j > 3$:

$$(B_j - \lambda_k I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \\ n_j \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\longleftarrow n_j \longrightarrow$$

con lo que

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = n_j - 2$$

(se eliminan en $(B_j - \lambda_k I_{n_j})^2$ las dos primeras columnas y las dos últimas filas y queda la matriz identidad de dimensión $(n_j - 2) \times (n_j - 2)$). En consecuencia:

$$\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I)^2 = \mathrm{r}(A_j - \lambda_k I)^2 = \sum_{j=1}^{s} n_j - 1 \cdot \nu_1(\lambda_k) - 2[\nu_2(\lambda_k) + \cdots + \nu_{m_k}(\lambda_k)]$$

y, por tanto,

$$\delta_2(\lambda_k) = \nu_1(\lambda_k) + 2[\nu_2(\lambda_k) + \cdots + \nu_{m_k}(\lambda_k)] \tag{21}$$

Es decir, cada bloque elemental 1×1 asociado a λ_k aporta una unidad a la dimensión del núcleo de $(A - \lambda_k I)^2$, mientras que los bloques de dimensión 2×2 y superiores aportan dos unidades cada uno.

Al calcular $(B - \lambda_k I)^3$, los bloques de dimensión 2×2 vuelven a dar, claro, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y su aportación a la dim $N(A - \lambda_k I)^3$ vuelve a ser $n_j - 0 = 2 - 0 = 2$ (y lo mismo será ya para cualquier potencia $(A - \lambda_k I)^l$, $l > 3$). Si B_j era de dimensión 3×3, se tendrá

$$(B_j - \lambda_k I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la aportación a $\delta_3(\lambda_k)$ será $3 - 0 = 3$. Si $n_j > 3$, entonces $\mathrm{r}(B_j - \lambda_k I_{n_j})^3 = n_j - 3$. Por su parte, los bloques correspondientes a un autovalor distinto de λ_k siguen aportando a $\delta_3(\lambda_k)$ una dimensión n_j. En consecuencia,

$$\delta_3(\lambda_k) = \nu_1(\lambda_k) + 2\nu_2(\lambda_k) + 3[\nu_3(\lambda_k) + \cdots + \nu_{m_k}(\lambda_k)] \tag{22}$$

Y, de manera general, se tienen, para cualquier autovalor λ_k, las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\delta_1(\lambda_k) &= v_1(\lambda_k) + v_2(\lambda_k) + \cdots + v_m(\lambda_k) \\
\delta_2(\lambda_k) &= v_1(\lambda_k) + 2[v_2(\lambda_k) + \cdots + v_{m_k}(\lambda_k)] \\
\delta_3(\lambda_k) &= v_1(\lambda_k) + 2v_2(\lambda_k) + 3[v_3(\lambda_k) + \cdots + v_{m_k}(\lambda_k)] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_{m_k-1}(\lambda_k) &= v_1(\lambda_k) + 2v_2(\lambda_k) + \cdots + (m-2)v_{m_k-2}(\lambda_k) + \\
&\quad + (m_k - 1)[v_{m_k-1}(\lambda_k) + v_{m_k}(\lambda_k)] \\
\delta_{m_k}(\lambda_k) &= v_1(\lambda_k) + 2v_2(\lambda_k) + \cdots + m_k v_{m_k}(\lambda_k)
\end{aligned}$$

Restando cada ecuación de la siguiente (suprimiendo de momento la dependencia en λ_k para simplificar la escritura) resulta el sistema equivalente:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_m \\
-\delta_1 + \delta_2 &= \phantom{v_1 + {}} v_2 + v_3 + \cdots + v_m \\
-\delta_2 + \delta_3 &= \phantom{v_1 + v_2 + {}} v_3 + \cdots + v_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\delta_{m-1} + \delta_m &= \phantom{v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + {}} v_m
\end{aligned}$$

Restando la $(l + 1)$-ésima ecuación de la anterior, se tiene:

$$v_1 = 2\delta_1 - \delta_2$$

y

$$v_l = -\delta_{l-1} + 2\delta_l - \delta_{l+1} \quad , \quad 1 < l < m \tag{23}$$

y la última ecuación da v_m.

Obsérvese que $\delta_0 = \dim N(A - \lambda_k I)^0 = \dim N(I) = 0$, y que al calcular $\delta_{m_k} = \dim N(A - \lambda_k I)^{m_k} = \dim N(B - \lambda_k I)^{m_k}$, las submatrices $(B_j - \lambda_k I)^{m_k}$ asociadas a λ_k son ya todas nulas (la dimensión de $(B_j - \lambda_k I)$ no puede superar $m_k \times m_k$), con lo que $\dim N(B - \lambda_k I)^{m_k+1} = \dim N(B - \lambda_k I)^{m_k}$ y, en consecuencia,

$$\delta_{m_k+1} = \delta_{m_k}$$

Vemos entonces que la ecuación (23) vale también para $l = 1$ y $l = m_k$, y se puede resumir todo lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 1. *La forma canónica de Jordan B de una matriz A está determinada por las ecuaciones*

$$v_{l-1}(\lambda) = -\delta_{l-1}(\lambda) + 2\delta_l(\lambda) - \delta_{l+1}(\lambda) \quad , \quad 1 \leqslant l \leqslant m(\lambda) \tag{24}$$

donde λ recorre los autovalores de A, $m(\lambda)$ es la multiplicidad de λ, $\nu_l(\lambda)$ es el número de bloques elementales de B de dimensión $l \times l$ correspondientes a λ y $\delta_l(\lambda) = \dim N(A - \lambda I)^l$.

En cuanto a la *forma canónica real*, es necesario adaptar los argumentos que llevan al teorema 1 anterior: Si λ es un autovalor real, llamamos, como antes, $\nu_l(\lambda)$ al número de λ-bloques elementales de dimensión $l \times l$ y $\delta_l(\lambda)$ a la dimensión de $N(A - \lambda I)^l$. Se tiene $1 \leqslant l \leqslant m(\lambda)$, siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad (algebraica) de λ. Para cada autovalor complejo $\lambda = a + bi$, $b > 0$, denotamos que $\nu_l(\lambda)$ el número de bloques de dimensión $2l \times 2l$ de la forma

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & O & \cdots & O \\ O & D & I_2 & \cdots & O \\ \cdots & & & & \\ O & \cdots & & D & I_2 \\ O & \cdots & & & D \end{bmatrix}$$

siendo

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en la forma canónica real de A, y ponemos

$$\delta_l(\lambda) = \dim N(A - \lambda I)^l$$

en tanto que espacio vectorial complejo. Se tiene entonces el teorema siguiente.

Teorema 2. *La forma canónica real de una matriz A está determinada por las ecuaciones*

$$\nu_l(\lambda) = -\delta_{l-1}(\lambda) + 2\delta_l(\lambda) - \delta_{l+1}(\lambda) \quad , \quad 1 \leqslant l \leqslant m(\lambda) \tag{25}$$

donde λ recorre todos los autovalores de A reales y complejos con parte imaginaria positiva, y siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad (algebraica) del autovalor λ.

Quedaría pendiente la determinación, en el caso general, de una matriz de paso P, o sea, tal que $AP = PB$, siendo P no singular. El uso que principalmente se hará de las formas canónicas de matrices será para extraer conclusiones de carácter cualitativo sobre las soluciones de los sistemas $x' = Ax$, y no tanto, en el caso general, para tratar de encontrar explícitamente dichas soluciones. Por ello, no expondremos de manera detallada el algoritmo mediante el cual se determina P. Señalemos únicamente que si la forma canónica de Jordan es

$$B = \text{diag } \{B_1, \ldots, B_s\}$$

y B_j es un λ-bloque elemental de dimensión $n_j \times n_j$ que ocupa en B el espacio determinado por las filas $f_j + 1$ hasta la $f_j \times n_j$ y las columnas de los mismos índices, entonces las columnas $v^{(f_j+1)}$, ..., $v^{(f_j+n_j)}$ de P verifican

$$\begin{cases} Av^{(f_j+1)} = \lambda v^{(f_j+1)} \\ Av^{(f_j+k)} = \lambda v^{(f_j+k)} + v^{(f_j+k-1)} \end{cases}, \quad k = 2, \ldots, n_j \tag{26}$$

(Por cada bloque elemental habrá un autovector de la matriz A.)

Se puede demostrar (véase [5]) que las ecuaciones (26), con $j = 1, \ldots, s$, permiten determinar n vectores linealmente independientes que constituirán las columnas de la matriz de paso P, al igual que veíamos en detalle para el caso $n = 3$. Inspirándose en este caso, no es difícil resolver problemas en dimensiones n no muy altas. Para obtener la matriz de paso correspondiente a la forma canónica real, cuando aparezcan autovalores complejos, se sustituyen en la matriz P que lleva a la forma canónica de Jordan los vectores sucesivos w y $\bar{w}$ por los vectores reales Re w e Im w.

EJEMPLO 5. Resolver $x' = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son $\pm 2i$ dobles. Se tiene

$$\mathrm{r}(A - (2i)I) = \mathrm{r} \begin{bmatrix} -2i & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1-2i & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2i & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1-2i \end{bmatrix} = 3$$

de donde dim $N(A - (2i)I) = 4 - 3 = 1 =$ Número de bloques elementales correspondientes a $2i$ (y a $-2i$). En consecuencia, la forma canónica de Jordan de A es

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{array}\right]$$

y la forma canónica real

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Calculemos ahora una matriz de paso P:

$$(A - (2i)I)^2 = \begin{bmatrix} -8 & 4 - 16i & -4i & 4 - 8i \\ 8i & -8 - 4i & -4 - 8i & -4i \\ 0 & -8i & -8 & -8i \\ -8i & 4i & 4 + 16i & -8 + 4i \end{bmatrix}$$

Hay que determinar un vector $w^2 \in \mathbb{C}^4$ tal que

$$w^2 \in N(A - (2i)I)^2 \quad , \quad w^2 \notin N(A - (2i)I)$$

Se puede tomar, por ejemplo,

$$w^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene, en efecto,

$$w^1 = (A - (2i)I)w^2 = \begin{bmatrix} -2i & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 - 2i & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2i & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de paso a la forma canónica de Jordan será, por tanto,

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w^1 & w^2 & \overline{w}^1 & \overline{w}^2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -i & i & i & -i \end{bmatrix}$$

mientras que la matriz de paso a la forma canónica real será:

$$P = \left[\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \text{Re } w^1 & \text{Im } w^1 & \text{Re } w^2 & \text{Im } v^2 \\ | & | & | & | \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Alternativamente, se podría proceder de la manera siguiente: se toma para w^1 un autovector de $2i$, o sea, tal que $(A - (2i)I)w^1 = 0$, y con ese w^1 se determina una solución w^2 del sistema no homogéneo $(A - (2i)I)w = w^1$. A continuación, se toma, como antes, $w^3 = \bar{w}^1$, $w^4 = \bar{w}^2$. Se puede comprobar —véase el apartado 4.1— que los vectores w^1, w^2, w^3 y w^4 así determinados son linealmente independientes.)

La solución general del sistema considerado será:

$$x(t) = e^{At}k = Pe^{Bt}k = P \cdot \exp\left[\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right] t \cdot k =$$

$$= P \cdot \exp\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] t \cdot \left[\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] t + (0)t^2\right] \cdot k =$$

$$= P \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \cos 2t & \text{sen } 2t & 0 & 0 \\ -\text{sen } 2t & \cos 2t & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos 2t & \text{sen } 2t \\ 0 & 0 & -\text{sen } 2t & \cos 2t \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot k =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos 2t & \text{sen } 2t & t\cos 2t & t \text{ sen } 2t \\ -\text{sen } 2t & \text{sen } 2t & -t \text{ sen } 2t & t\cos 2t \\ \hline 0 & 0 & \cos 2t & \text{sen } 2t \\ 0 & 0 & -\text{sen } 2t & \cos 2t \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 6. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son 3, triple, y $5 \pm 2i$, dobles. Se tiene

$$r(A - 3I) = 5$$

de donde $\delta_1(3) = 7 - 5 = 2$, es decir, hay dos bloques elementales de Jordan asociados al autovalor 3 y ya no hace falta seguir calculando los siguientes $\delta_i(3)$.

Por su parte,

$$r(A - (5 + 2i)) = 6$$

con lo que $\delta_1(5 + 2i) = 7 - 6 = 1$ y hay un solo bloque elemental correspondiente a $5 + 2i$ (y lo mismo para su conjugado). La matriz de Jordan de A será, pues:

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5+2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5+2i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-2i \end{array}\right]$$

Calculemos una matriz de paso; la segunda columna v^2 ha de ser una solución del sistema $(A - 3I)^2 v = 0$ que no sea autovector, o sea, tal que $(A - 3I)v \neq 0$:

$$(A - 3I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -3 & -4 & 11 & 5 & 10 \\ 20 & -4 & -8 & -3 & 14 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 18 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 22 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y podemos tomar

$$v^2 = (15/64,\ 75/64,\ -1/4,\ -2,\ 0,\ -1,\ 0)$$

No está en $N(A - 3I)$, pues los vectores de éste han de satisfacer $v_6 + 2v_7 = 0$ (quinta ecuación del sistema $(A - 3I)v = 0$). La primera columna de la matriz de paso será, entonces:

$$v^1 = (A - 3I)v^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/64 \\ 75/64 \\ -1/4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/32 \\ 59/32 \\ 1/4 \\ -17/4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tercera columna v^3 ha de ser un autovector linealmente independiente de v^1. Por ejemplo,

$$v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(Puede hacerse un cálculo alternativo como en el ejemplo anterior; véase también el apartado *C*) anterior relativo a una matriz A, 3×3, con un autovalor triple y matriz canónica con dos bloques elementales.)

Para las restantes columnas, asociadas a los autovectores $5 \pm 2i$, la situación es análoga a la del ejemplo precedente: la cuarta columna, w^4, es una solución del sistema $(A - (5 + 2i))w = 0$, o sea, un autovector de $5 + 2i$. Con el w^4 calculado, se determina una solución w^5 del sistema no homogéneo $(A - (5 + 2i)I)w = w^4$ (o bien, se sigue el camino alternativo de determinar una solución w^5 del sistema $(A - (5 + 2i)I)^2 w = 0$ que no sea autovector, o sea, que no satisfaga $(A - (2i)I)w = 0$). Finalmente, se toma $w^6 = \overline{w}^4$ y $w^7 = \overline{w}^5$. Efectuando los cálculos,

vemos que se puede tomar

$$w^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w^5 = \begin{bmatrix} 2/5-(8/15)i \\ 1 \\ -(4/3)i \\ -8/3-(4/3)i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forma canónica real es

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

y la correspondiente matriz de paso será:

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 & v^5 & v^6 & v^7 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ v^1 & v^2 & v^3 & \text{Re } w^4 & \text{Im } w^4 & \text{Re } w^5 & \text{Im } w^5 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 17/32 & 15/64 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & -8/15 \\ 59/32 & 75/64 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/3 \\ -17/4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -8/3 & -4/3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 7. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \\ x_3' = -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \\ x_4' = x_4 - x_5 \\ x_5' = x_4 - x_5 \end{cases}$$

El polinomio característico de la matriz A de coeficientes es $\det(A - \lambda I) = -\lambda^5$, es decir, 0 es autovalor de multiplicidad 5. Se tiene, $r(A) = 2$, de donde $\delta_1 = \dim N(A) = 5 - 2 = 3$ y, por tanto, la matriz de Jordan de A constará de tres bloques de Jordan. Como A^2 es la matriz cero, se tendrá $\delta_2 = \dim N(A^2) = 5$. En consecuencia, el número de bloques 1×1 será

$$\nu_1 = 2\delta_1 - \delta_2 = 6 - 5 = 1$$

y la forma canónica de A es la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(No hace falta calcular $\nu_2 = -\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 = -3 + 10 - 5 = 2$ ¿por qué?)

Para determinar una matriz de paso P, observamos que sus columnas han de satisfacer

$$Av^1 = 0 \quad , \quad Av^2 = v^1 \quad , \quad Av^3 = 0 \quad , \quad Av^4 = v^3 \quad , \quad Av^5 = 0 \tag{27}$$

De ello se deduce, en particular, que $A^2v^2 = 0$ y $A^2v^4 = 0$. Como

$$\underset{(\dim = 3)}{N(A)} \subset N(A^2) = \mathbb{R}^5$$

podemos elegir dos vectores linealmente independientes v^2, $v^4 \in \mathbb{R}^5$ que no pertenezcan a $N(A)$. Las ecuaciones de este subespacio son

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

con lo que se puede tomar, por ejemplo,

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponemos, a continuación,

$$v^1 = Av^2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v^3 = Av^4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y se elige para v^5 un autovector de A linealmente independiente con v^1 y v^3 (dim $N(A) = 3$); por ejemplo,

$$v^5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores así elegidos satisfacen las ecuaciones (27) y son linealmente independientes, teniéndose entonces la matriz de paso

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución general del sistema propuesto será:

$$x(t) = Pe^{Bt}K = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K =$$

$$= \begin{bmatrix} -2(2k_2 + k_4)t - 4k_1 + k_2 - 2k_3 + 2k_5 \\ -k_2 t - k_1 + k_5 \\ -(3k_2 + k_4)t - 3k_1 - 3k_3 + k_5 \\ k_4 t + k_3 + k_4 \\ k_4 t + k_3 \end{bmatrix}$$

5.4. Ecuaciones lineales de orden *n*

Nos proponemos resolver la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \tag{1}$$

donde x: $t \to x(t) \in \mathbb{R}$ y $a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales.

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x' = x_2 \\ x'' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x^{(n-2)} = x_{n-1} \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases} \tag{2}$$

la ecuación (1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}' = x_2 \\ x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n \end{cases} \tag{3}$$

o, en forma matricial,

$$x' = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{3'}$$

Proposición 1. *La ecuación característica de la matriz A del sistema* (3') *es*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre n. Para $n = 2$ se comprueba inmediatamente (véase el apartado 4.4). Supongamos que la proposición es cierta para $(n-1)$ y sea A_{n-1} la submatriz de A obtenida al eliminar de ésta la primera fila y la primera columna. Desarrollando por la primera columna y teniendo en cuenta la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda \det(\lambda I - A_{n-1}) + (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-1} = \\ &= \lambda(\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + a_n = \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \end{aligned}$$

Obsérvese cómo la ecuación característica se puede escribir directamente a partir de la ecuación diferencial.

Para aplicar el método desarrollado en el apartado anterior 5.3 a la resolución de la ecuación (1), necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2. *La forma canónica real de la matriz A del sistema* (3') *equivalente a la ecuación* (1) *tiene un solo bloque elemental correspondiente a cada autovalor, real o complejo, de A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ un autovalor de A. El número de λ-bloques es dim $N(A - \lambda I)$. Entonces:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 - \lambda \end{bmatrix} \tag{3'}$$

Descartando la primera columna y la última fila, vemos que $r(A - \lambda I) = n - 1$, con lo que dim $N(A - \lambda I) = n - (n-1) = 1$.

En consecuencia, y de acuerdo con el teorema 3 del apartado 5.2, se tendrá el teorema siguiente.

Teorema 1. *Las n funciones siguientes forman una base del espacio de soluciones de* (1):

$$t^l e^{at} \cos bt \quad , \quad t^q e^{at} \operatorname{sen} bt$$

donde $\lambda = a + bi$ *recorre las raíces de la ecuación característica* (4) *con* $b \geqslant 0$ *y* l, q *son enteros tales que* $0 \leqslant l, q \leqslant m(\lambda) - 1$, *siendo* $m(\lambda)$ *la multiplicidad de la raíz* λ.

EJEMPLO. Sea la ecuación

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} - 2x'' + 6x' + 5x = 0 \tag{5}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

que tiene por soluciones

$$-1 \text{ doble} \quad \text{y} \quad 2 \pm i$$

En consecuencia, la solución general es:

$$x(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} + Ce^{2t} \cos t + De^{2t} \operatorname{sen} t \tag{6}$$

siendo A, B, C y D constantes arbitrarias.

Si se requiere determinar la solución correspondiente a unas condiciones iniciales dadas, por ejemplo,

$$x(0) = 1 \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad x''(0) = -1 \quad , \quad x^{(3)}(0) = 2 \tag{7}$$

se imponen estas condiciones iniciales en (6), es decir,

$$\begin{cases} x(0) &= A + C = 1 \\ x'(0) &= (-A + B) + (2C + D) = 0 \\ x''(0) &= (A - 2B) + (3C + 4D) = -1 \\ x^{(3)}(0) &= (A - B) + (2C + 3D) = 2 \end{cases} \tag{8}$$

La solución única de (8) es

$$A = 9 \quad , \quad B = -3 \quad , \quad C = -8 \quad , \quad D = 2$$

con lo que la solución del problema de valor inicial (5), (7), es:

$$x(t) = 9e^{-t} - 3te^{-t} - 8e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\operatorname{sen} t$$

Para resolver la ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = b(t) \tag{9}$$

donde $b(t)$ es una función continua definida en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$, se pasaría al sistema equivalente

$$x' = Ax + b(t) \tag{10}$$

con A como en (3') y

$$b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Resuelto el sistema homogéneo asociado (que da la solución general de la ecuación homogénea (1) asociada a (9)) se aplicaría el método de variación de las constantes (véase el apartado 2.4) para obtener una solución particular, según indicábamos en el apartado 2.5. Como comentábamos en este último apartado, puede ahorrarse el paso al sistema equivalente y los cálculos, en general complicados, a que conduce el método de variación de las constantes, si sabemos determinar por algún medio una solución particular de la ecuación (9), pues entonces la solución general de (9) estará dada por la suma de esa solución particular y la solución general de la ecuación homogénea, dada por el teorema 1 anterior. Ese «medio» puede ser, en particular, el *método de coeficientes indeterminados* que desarrollamos en el apartado 4.4 para las ecuaciones de segundo orden y que es aplicable a ecuaciones de orden n cualquiera. En efecto, no es difícil probar, como para las ecuaciones de segundo orden, la siguiente proposición.

Proposición 3. *Si el segundo miembro de la ecuación*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = b(t)$$

es de la forma

$$b(t) = e^{at}[P_l(t)\cos bt + Q_q(t)\operatorname{sen} bt] \tag{11}$$

donde $P_l(t)$ y $Q_q(t)$ representan polinomios de grado l y q, respectivamente, entonces existe una solución particular de la forma

$$x_p(t) = t^r e^{at}[\tilde{P}_k(t) \cos bt + \tilde{Q}_k(t) \operatorname{sen} bt] \tag{12}$$

donde $k = \text{máx } (l, q)$, $\tilde{P}_k(t)$ y $\tilde{Q}_k(t)$ son polinomios de grado k de coeficientes indeterminados y r es la multiplicidad de $\lambda = a \pm ib$ como raíz de la ecuación característica ($r = 0$ significa que $a \pm ib$ no son raíces de dicha ecuación).

Si el segundo miembro es una combinación lineal de h funciones de la forma (11), se aplica la proposición 3 a los correspondientes h problemas individuales como indicábamos al tratar de las ecuaciones de segundo orden.

PROBLEMAS

1. Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

a) $\begin{bmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} -16 & -2 & 22 \\ -9 & -3 & 13 \\ -17 & -4 & 24 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; *d)* $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; *f)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Se considera el sistema $x' = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo a un parámetro que recorre $\mathbb{R}$. Determinar la solución general del sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

3. Determinar las soluciones $\{x(t), y(t)\}$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'' = x - y \\ y'' = x + y \end{cases}$$

4. Resolver el problema de valor inicial

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad ; \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Véase el problema 1*a*).)

5. Hallar la solución general de las ecuaciones

a) $x^{(3)} - 7x'' + 19x' - 13x = t^2 - 2t$

b) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = \cos 2t$

6. Determinar el menor entero $n > 0$ para el que una ecuación diferencial de la forma

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

tiene entre sus soluciones a las funciones

$$e^{-3t} \quad , \quad te^{-t} \cos 2t \quad , \quad t \quad , \quad \operatorname{sen} t$$

7. Comprobar con las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que no siempre se cumple la «regla de los exponentes» para la exponencial de matrices.

8. Demostrar que si Re $\lambda < 0$ para todo autovalor λ de la matriz A, entonces

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$$

para toda solución $x(t)$ de $x' = Ax$.

9. Probar que si λ es un autovalor de A, entonces e^{λ} es autovalor de e^{A}, correspondiéndoles los mismos autovectores (reales si λ es real y complejos si λ es complejo).

10. Se trata de demostrar las cuestiones que siguen sin apelar al teorema de existencia y unicidad de solución del PVI para sistemas lineales (teorema 1 del apartado 2.1):

a) Probar que la serie matricial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

es absolutamente convergente, definiendo su suma, en consecuencia, una matriz denotada por exp (A) o e^{A}. Probar que $|e^{A}| \leqslant e^{|A|}$.

b) Sean

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = A \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_k = B$$

dos series de matrices absolutamente convergentes. Probar que, entonces,

$$AB = C = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \quad \text{con} \quad C_l = \sum_{j+k=l} A_j B_k$$

(*Indicación*: Imítese la demostración del correspondiente resultado para series numéricas: «Si $\Sigma a_j = a$ y $\Sigma b_k = b$ son absolutamente convergentes, entonces la serie producto

$$\Sigma c_l \quad \text{con} \quad c_l = \sum_{j+k=l} a_j b_k$$

tiene por suma $a \cdot b$.)

c) Probar que si $AB = BA$ se tiene que

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B}$$

(*Indicación*: Utilícese *b*) y el teorema binomial, válido gracias a que las matrices conmutan.)

d) Probar que $e^{-A} = (e^{A})^{-1}$.

e) Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{A} = e^{a}\begin{bmatrix} \cos b & \text{sen } b \\ -\text{sen } b & \cos b \end{bmatrix}$$

f) Probar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = A$$

y que, en consecuencia,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$$

g) Probar, utilizando *f*), que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

tiene una solución única. (*Indicación*: Para la unicidad, véase el argumento utilizado para las ecuaciones escalares.)

(*Nota.* Se puede, pues, desarrollar la teoría de sistemas lineales con coeficientes constantes independientemente de la teoría general desarrollada en el capítulo 2.)

11.

a) Dada una matriz $B(t)$, $n \times n$, cuyos elementos son funciones de t, comprobar, como en el problema 10, que está bien definida la matriz

$$\exp(B(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k(t)}{k!}$$

con las propiedades *c*) y *d*) anteriores.

b) Se trata de probar el siguiente resultado: «Si $A(t)$, función matricial continua en (α, ω), y

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds$$

con $t_0 \in (\alpha, \omega)$, son tales que

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \qquad (*)$$

para todo $t \in (\alpha, \omega)$, entonces la solución del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

está dada por

$$x(t) = [\exp B(t)]x^0»$$

La idea es generalizar el argumento utilizado en la proposición 1 del apartado 5.1:

1. Pruébese por inducción que

$$\frac{d}{dt}[B(t)]^j = jA(t)[B(t)]^{j-1}$$

para todo entero positivo j.

2. Si $x_j(t)$ representa la iterante de Picard j-ésima, pruébese por inducción que

$$x_j(t) = \left(I + B + \frac{B^2}{2!} + \cdots + \frac{B^j}{j!}\right)x^0$$

(*Indicación*: Utilícese 1 y el hecho de que $x_j'(t) = A(t)x_{j-1}(t)$.)

Conclúyase de lo anterior el resultado enunciado.

(*Nota*: Vemos, pues, que la solución del problema de valor inicial para una ecuación lineal homogénea viene dada mediante la exponencial si se cumple la condición de conmutación (*). Es ésta una condición bastante exigente que *sí* se cumple si A es constante o si $A(t)$ es diagonal, así como, naturalmente, en el caso escalar estudiado en el capítulo 1.)

12. Probar la proposición 3 del apartado 5.4.

13. Sea A una matriz que deja invariante un subespacio vectorial $E \subset \mathbb{R}^n$ (o sea, tal que $Ax \in E$ siempre que $x \in E$). Probar que si $x(t)$ es una solución de $x' = Ax$ tal que $x(t_0) \in E$, entonces $x(t) \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (en otras palabras, si A deja invariante E, lo mismo ocurre con la matriz e^{tA}, para todo $t \in \mathbb{R}$). (*Indicación*: Es necesario utilizar el hecho de que E es topológicamente cerrado en $\mathbb{R}^n$. Véase el apéndice 3 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor.)

6 Comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema lineal

En muchas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias interesan, tanto o más que el conocimiento explícito de las soluciones, determinadas propiedades de éstas de carácter cualitativo, tales como la periodicidad, si sus valores permanecen o no en un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ al transcurrir el tiempo, o si existe el límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$ (o $t \to -\infty$) para una o más soluciones del sistema (a fin de conocer, en la práctica, el comportamiento a largo plazo del sistema físico eventualmente bajo estudio). Cuestiones de este tipo se pueden analizar sin necesidad de conocer explícitamente las soluciones, a partir de la propia ecuación diferencial. Hemos visto que ese conocimiento explícito sólo se puede tener, hablando en general, para el caso de sistemas homogéneos con coeficientes constantes, pero incluso en este caso los cálculos pueden ser complicados y son, por ello, interesantes métodos «indirectos» que permitan tratar aquellas cuestiones cualitativas, métodos que se hacen indispensables en el caso de los sistemas lineales no autónomos (o sea, con coeficientes variables y/o término no homogéneo $b(t)$). Por otro lado, los resultados que se establezcan para sistemas lineales serán de gran valor para el estudio de sistemas no lineales cuando éstos, en un sentido «local», se aproximen por sistemas lineales.

Una primera lectura de este capítulo puede limitarse a los tres primeros apartados, o, incluso, únicamente al primero de ellos.

6.1. Atractores y fuentes

Comenzamos a estudiar aquí de manera sistemática el comportamiento cuando $t \to \infty$ (o $t \to -\infty$) de las soluciones de un sistema $x' = Ax$, cuestión sobre la que hemos visto algunos resultados parciales en los capítulos anteriores. Una propiedad de los autovalores de la matriz A se traduce en una propiedad muy significativa de las soluciones del sistema $x' = Ax$, según se deducirá del siguiente teorema.

Teorema 1. *Supongamos que* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *para todo autovalor* λ *de la matriz* A, *y sea* $\eta > 0$ *tal que* $\operatorname{Re}\lambda < -\eta$. *Entonces existe una constante* $M > 0$ *tal que*

$$|e^{tA}| \leqslant Me^{-\eta t} \tag{1}$$

para todo $t \geqslant 0$ [1].

DEMOSTRACIÓN. Como sabemos,

$$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$$

siendo B la forma canónica de Jordan de A. Entonces [2],

$$|e^{tA}| = |P||e^{tB}||P^{-1}| \leqslant |P||P^{-1}||e^{tB}| \tag{2}$$

Pero $B = \operatorname{diag}\{B_1, ..., B_s\}$, siendo cada B_j un bloque elemental de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \tag{3}$$

con λ autovalor, real o complejo, de la matriz A. Y como

$$e^{tB} = \operatorname{diag}\{e^{tB_1}, ..., e^{tB_s}\}$$

se tendrá

$$|e^{tB}| \leqslant |e^{tB_1}| + \cdots + |e^{tB_s}| \tag{5}$$

Basta entonces considerar e^{tB_j} con B_j un bloque elemental correspondiente a un autovalor $\lambda = a + bi$ ($b = 0$ si el autovalor es real). Si B_j es un bloque elemental de

---

[1] Obsérvese que la desigualdad (1) no depende de la norma considerada. En efecto, para dos normas cualesquiera, $|..|$ y $\|..\|$, en un espacio euclídeo (véase el apéndice 3 de *Ecuaciones diferenciales II*, del mismo autor) se tiene

$$\alpha|..| \leqslant \|..\| \leqslant \beta|..|$$

para unas ciertas constantes $\alpha, \beta > 0$. Entonces, para las matrices implicadas se tendría:

$$\|e^{tA}\| \leqslant \beta|e^{tA}| \leqslant \beta Me^{-\eta t} = M'e^{-\eta t}$$

Y, análogamente, de la verificación de (1) para $\|..\|$ se deduciría la verificación para $|..|$.

[2] La norma (rectangular) de un vector complejo $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ es $|z| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, donde $|z_j|$ representa el módulo del número complejo z_j. Y, análogamente, la norma de una matriz $P = (p_{ij})$ de elementos complejos es $|P| = \Sigma |p_{ij}|$ (véase el apartado 2.2).

dimensión $n_j \times n_j$, entonces:

$$|e^{tB_j}| = \left| e^{\lambda t}\left(I + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)}N^{n_j-1}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{at}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n_j-1}t^{n_j-1}) = e^{at}p_j(t)$$

siendo

$$a_l = \frac{1}{l!}|N^l| \quad , \quad l = 0, 1, \ldots, n_j - 1$$

Sea $\varepsilon_j = -\eta - a$; $\varepsilon_j > 0$ por hipótesis (Re $\lambda < -\eta$), con lo que

$$|e^{tB_j}| \leqslant e^{[a+\varepsilon_j-\varepsilon_j]t}p_j(t) = e^{-\eta t}[e^{-\varepsilon_j t}p_j(t)]$$

Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{t\to\infty}\,[e^{-\varepsilon_j t}p_j(t)] = 0$$

y, por tanto,

$$e^{-\varepsilon_j t}p_j(t) \leqslant K_j \quad \text{para todo} \quad t \geqslant 0$$

De donde

$$|e^{tB_j}| \leqslant K_j e^{-\eta t} \tag{6}$$

De acuerdo con (5):

$$|e^{tB}| \leqslant Ke^{-\eta t}$$

y, por (2),

$$|e^{tA}| \leqslant Me^{-\eta t}$$

según queríamos demostrar.

Corolario. Lím $x(t) = 0$ *cuando* $t \to \infty$ *para toda solución de* $x' = Ax$ *si, y sólo si,* Re $\lambda < 0$ *para todo autovalor* λ *de* A.

DEMOSTRACIÓN. *a*) Por el teorema anterior:

$$|x(t)| = |e^{tA}x(0)| \leqslant |e^{tA}||x(0)| \leqslant Me^{-\eta t}|x(0)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

b) Supongamos que existe un autovalor λ de A tal que Re $\lambda \geqslant 0$. Sea v un autovector de λ. Si λ es real, v es real y:

$$v(t) := e^{tA}v = e^{\lambda t}v \quad [3]$$

de donde, para $t \geqslant 0$:

$$|v(t)| = |e^{\lambda t}v| = e^{\lambda t}|v| \geqslant |v|$$

con lo que $v(t) \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. Si λ es complejo, v es complejo y se tiene también (tomando normas en $\mathbb{C}^n$):

$$|v(t)| = |e^{\lambda t}v| = |e^{\lambda t}||v| = |e^{at}\ (\cos bt + i \text{ sen } bt)||v| = e^{at}|v| \geqslant |v|$$

teniendo en cuenta que $a \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

Y, como $v(t) = \text{Re } v(t) + i \text{ Im } v(t)$.

$$|v| \leqslant |v(t)| \leqslant |\text{Re } v(t)| + |\text{Im } v(t)|$$

con lo que no puede ocurrir que ambas soluciones reales, Re $v(t)$ e Im $v(t)$, converjan a 0 cuando $t \to \infty$.

Definición 1. *El sistema lineal $x' = Ax$ (o bien el origen de $\mathbb{R}^n$) se dice que es atractor (del sistema) si ocurre que $e^{tA}x \to 0$ cuando $t \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Esto es equivalente, de acuerdo a lo anterior, a que Re $\lambda < 0$ para todo autovalor de A (una propiedad algebraica caracteriza, pues, una propiedad cualitativa de las soluciones de la ecuación diferencial).

Teorema 2. *Si* Re $\lambda > 0$ *para todo autovalor λ de A y $\eta > 0$ es tal que* Re $\lambda > \eta$, *entonces existe $M_1 > 0$ tal que*

$$|e^{tA}x| \geqslant M_1 e^{\eta t}|x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \geqslant 0$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema 1 a $-A$:

$$|x| = |e^{t(-A)}e^{tA}| \leqslant e^{t(-A)}||e^{tA}x| \leqslant Me^{-\eta t}|e^{tA}x|$$

de donde

$$|e^{tA}x| \geqslant M_1 e^{\eta t}|x|$$

con $M_1 = M^{-1}$.

---

[3] Por la unicidad de solución del problema de valor inicial tomando v como valor inicial. (Véase el comienzo del apartado 3.1.) Obsérvese que si λ es autovalor de A, entonces e^{λ} es autovalor de e^{A}, con el mismo autovector v. (Véase el problema 9 del capítulo 5.)

Corolario. Lím $|e^{tA}x| = \infty$ *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, *si, y sólo si,* Re $\lambda > 0$ *para todo autovalor* λ *de* A.

La demostración es análoga a la del corolario anterior.

Definición 2. *El sistema lineal* $x' = Ax$ *(o bien el origen de* $\mathbb{R}^n$*) se denomina fuente (del sistema) si se verifica que* $|e^{tA}x| \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $x \neq 0$ *de* $\mathbb{R}^n$.

Esto es equivalente, de acuerdo con el corolario anterior, a que Re $\lambda > 0$ para todo autovalor λ de A.

En el caso de los sistemas planos, los nodos y focos estables son ejemplos de atractores, mientras que los nodos y focos inestables lo son de fuentes.

La aplicación de los resultados anteriores, en particular la caracterización de los atractores, requiere conocer las raíces de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, lo que puede ser complicado si n es grande. Pero obsérvese que, en realidad, basta conocer el *signo* de dichas raíces, y para ello existen criterios basados en operaciones sobre los coeficientes de dicha ecuación, entre los que cabe destacar el *criterio de Routh-Hurwitz*, que damos sin demostración (véase [5]).

Teorema 3. *Sea la ecuación con coeficientes reales*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad ; \quad (a_0 > 0) \tag{7}$$

Se construye la matriz

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde $a_j = 0$ *si* $j > n$. *Entonces, todas las raíces de la ecuación* (7) *tienen parte real negativa si, y sólo si:*

$$\Delta_1 > 0 \quad , \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \tag{9}$$

donde $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *son los sucesivos menores principales de la matriz* (8), *es decir*:

$$\Delta_1 = a_1 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad ,$$

$$\ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

El criterio de Routh-Hurwitz resulta complicado en la práctica si n es grande, pero, por otro lado, es de gran utilidad cuando en el sistema $x' = Ax$ los coeficientes (elementos de la matriz A) y, a través de ellos, los coeficientes de la ecuación característica, dependen de *parámetros* que al variar pueden implicar un cambio en el comportamiento asintótico de las soluciones.

Pueden ser útiles las siguientes condiciones *necesarias*.

Teorema 4. *Si las raíces de la ecuación* (7) *tienen todas parte real negativa, entonces*:

a) $a_n \neq 0$.

b) *Todos los coeficientes de* (7) *son positivos.*

DEMOSTRACIÓN. *a*) $a_n \neq 0$ excluye, simplemente, el que $\lambda = 0$ sea raíz.

b) Si escribimos la ecuación (7) en la forma $a_0 p(\lambda) = 0$, *entonces* $p(\lambda)$ se puede factorizar en términos de la forma $\lambda + a$ y/o $\lambda^2 + b\lambda + c$. Si las raíces tienen todas parte real negativa, entonces $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, lo que implica que los coeficientes de $p(\lambda)$, o sea, $a_1/a_0, \ldots, a_n/a_0$, son positivos; como se supone $a_0 > 0$, $a_1, \ldots, a_n$ también serán positivos.

EJEMPLO 1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_2 + 2ax_3 \\ x_3' = bx_1 - bx_3 \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales. La ecuación característica de la matriz del

sistema,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2a \\ b & 0 & -b \end{bmatrix}$$

es

$$\lambda^3 + (2+b)\lambda^2 + 2b\lambda + 2ab = 0$$

Los coeficientes de esta ecuación son

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 2 + b \quad , \quad a_2 = 2b \quad , \quad a_3 = 2ab$$

con lo que la *matriz de Hurwitz* será:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+b & 2ab & 0 \\ 1 & 2b & 0 \\ 0 & 2+b & 2ab \end{bmatrix}$$

La condición de atractor es:

$$\Delta_1 = 2 + b > 0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+b & 2ab \\ 1 & 2b \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = 2ab\Delta_2 > 0$$

que se simplifica en

$$b > -2 \quad , \quad b(2 + b - a) > 0 \quad , \quad ab > 0$$

En el *plano de parámetros* $a - b$, esas condiciones determinan la región (de valores de (a, b)) para la que el sistema es atractor (la región abierta rayada de la figura 1, denominada *región de estabilidad*).

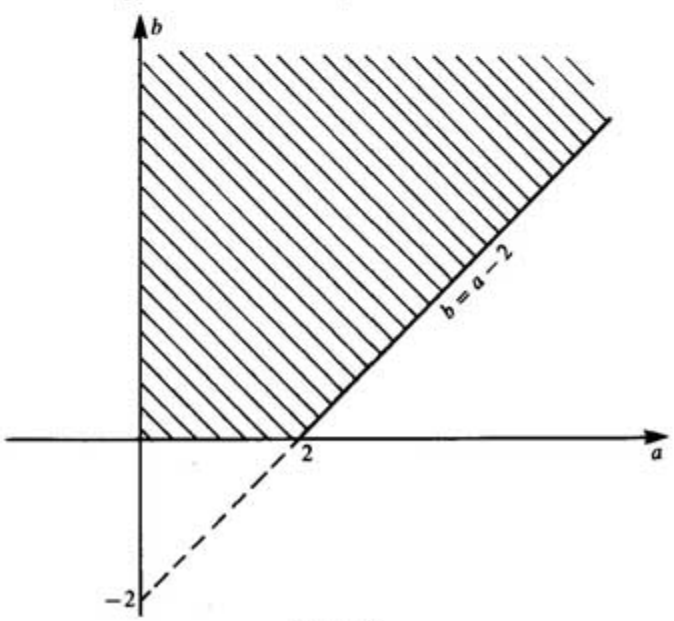


Figura 1

Los puntos de la frontera de dicha región son «puntos de bifurcación»: al pasar por ellos el par de parámetros (a, b) se produce un cambio cualitativo, una «bifurcación», en el comportamiento de las soluciones del sistema.

También son interesantes criterios dados en función de la propia matriz A del sistema que eviten tener que desarrollar la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ cuando n es grande. Así, por ejemplo, se tienen las dos condiciones necesarias (no suficientes) siguientes:

A) Para que el sistema $x' = Ax$ sea atractor es necesario que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} < 0$$

En efecto, al desarrollar la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$, *el coeficiente de* λ^{n-1} es igual a $-\sum_i a_{ii}$. Pero en una ecuación algebraica, sabemos que el coeficiente de λ^{n-1} es igual a la suma de las raíces cambiada de signo, de donde $\Sigma \lambda_k = \Sigma a_{ii}$, y, en consecuencia, Re $\lambda_k < 0$ para todo k implica que $\Sigma a_{ii} < 0$ [4].

B) Para que el sistema $x' = Ax$ sea atractor, es necesario que

$$\text{signo } (\det A) = \text{signo } (-1)^n$$

En efecto, $\det A = \lambda_1, ..., \lambda_n$ [5], con lo que si $\lambda < 0$ para todo autovalor real λ, se tendrá que signo $(\lambda_1, ..., \lambda_n) =$ signo $(-1)^n$. (Si aparece un par de autovalores complejos $a \pm ib$, entonces el producto $\lambda\bar{\lambda}$ es el número positivo $a^2 + b^2$, y no produce cambio de signo.)

Otras dos condiciones interesantes son las siguientes:

C) Supongamos que $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica (con lo que todos sus autovalores serán reales; véase apéndice 3 de *Ecuaciones diferenciales II*). *Entonces, los autovalores de A son todos negativos si, y sólo si, la forma cuadrática $x^T Ax$ es*

---

[4] Alternativamente: la traza de una matriz es invariante por semejanza (operando, se comprueba que traza (AB) = traza (BA), de donde traza $(P^{-1}AP)$ = traza $(PP^{-1}A)$ = traza (A)). Y recuérdese que la traza de la matriz de Jordan de A es la suma de los autovalores de A, o, lo que es lo mismo, la suma de las partes reales de dichos autovalores.

[5] El determinante de una matriz es invariante por semejanza, como se comprueba inmediatamente por las propiedades de los determinantes.

definida negativa, lo cual es equivalente a que los sucesivos menores principales de A verifiquen

$$a_{11} < 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \text{signo} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{signo } (-1)^n$$

[Una forma cuadrática real $\mathscr{A}(x, x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^TAx$, siendo A la matriz simétrica (a_{ij}), se dice que es *definida negativa* si $\mathscr{A}(x, x) < 0$ para todo vector $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ (se aplica también ese término a la matriz A de coeficientes). Que todos los autovalores de la matriz A sean negativos y que se tenga esa sucesión de signos para los sucesivos menores principales de A son ambas condiciones necesarias y suficientes para que la forma cuadrática sea definida negativa, por lo que serán condiciones equivalentes entre sí. Consúltese este resultado sobre formas cuadráticas en [5], por ejemplo.]

D) Se considera la matriz

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{1n} + a_{n1}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{n2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}(a_{n1} + a_{1n}) & \frac{1}{2}(a_{n2} + a_{2n}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

que, como se ve, es simétrica. Entonces, que los menores principales de B vayan alternando de signo, comenzando con el (−), o sea, que B sea definida negativa, es condición suficiente para que el sistema $x' = Ax$ sea atractor [6].

---

[6] Para demostrar este resultado conviene utilizar la *norma euclídea* en $\mathbb{R}^n$: $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$; se necesita también el resultado de formas cuadráticas que establece que $\alpha\|x\|^2 \leqslant \mathscr{A}(x, x) \leqslant \beta\|x\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, siendo α y β, respectivamente, los autovalores mínimo y máximo de la matriz A de coeficientes de la forma cuadrática (véase [5]). Considerando una solución no trivial $x(t)$ cualquiera del sistema $x' = Ax$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x(t)\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(x^Tx)\right) = \frac{1}{2}\dot{x}^Tx + \frac{1}{2}x^T\dot{x} = \frac{1}{2}x^TA^Tx + \frac{1}{2}x^TAx =$$

$$= x^T\left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)x = x^TBx \leqslant \beta\|x(t)\|^2$$

6.2. Sistemas hiperbólicos

Definición. *Un sistema lineal* $x' = Ax$ *(o el origen de* $\mathbb{R}^n$*) se dice que es hiperbólico si todos los autovalores de* A *tienen parte real distinta de cero.*

El número $n_s = n_s(A)$ de autovalores, contando la multiplicidad, que tienen parte real negativa se denomina *índice de estabilidad* del sistema. Los atractores y las fuentes son hiperbólicos; vienen a ser los casos extremos: el índice de estabilidad de un atractor es n y el de una fuente, cero. Los sistemas planos simples estudiados en el capítulo 4 son todos hiperbólicos excepto el caso centro; el índice de estabilidad del punto de silla es 1, el de los nodos y focos estables es 2 y el de los nodos y focos inestables, 0.

Intentemos identificar las soluciones de un sistema hiperbólico $x' = Ax$ que verifican que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{1}$$

Para ello, basta hacer el estudio en el sistema equivalente

$$y' = By \tag{2}$$

que resulta al hacer el cambio de variables $x = Py$, tal que $B = P^{-1}AP$ es la forma canónica real de A. En efecto, si $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, para $x(t) = Py(t)$:

$$0 \leqslant |x(t)| \leqslant |P||y(t)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

y, recíprocamente, si $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, se tendrá

$$0 \leqslant |y(t)| = |P^{-1}x(t)| \leqslant |P^{-1}||x(t)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

Así pues, la propiedad (1) es invariante por cambios regulares lineales de coordenadas.

Los autovalores de B son, como sabemos, los mismos que los de A, con lo que

---

siendo β el mayor autovalor de la matriz $B = 1/2(A + A^T)$. Entonces:

$$\|x(t)\| \frac{d\|x(t)\|}{dt} \leqslant \beta \|x(t)\|^2$$

O sea,

$$\frac{d(\ln \|x(t)\|)}{dt} \leqslant \beta$$

lo que implica

$$\|x(t)\| \leqslant e^{\beta t}\|x(0)\|$$

Si B es definida negativa, $\beta < 0$ y se tendrá: $\lim \|x(t)\| = 0$ cuando $t \to \infty$, para toda solución $x(t)$.

el sistema (2) será también hiperbólico y con el mismo índice de estabilidad. Suponemos (lo que es legítimo, pues B está unívocamente determinada salvo el orden de los bloques) que en B aparecen en primer lugar los bloques elementales correspondientes a los autovalores con parte real negativa y a continuación los correspondientes a los autovalores con parte real positiva:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} B_s \\ (\mathrm{Re}\,\lambda < 0) \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} B_u \\ (\mathrm{Re}\,\lambda > 0) \end{matrix} \end{array}\right] \tag{3}$$

El sistema (2) se puede desacoplar entonces en dos subsistemas:

$$\begin{cases} y'_{(s)} = B_s y_{(s)} \\ y'_{(u)} = B_u y_{(u)} \end{cases} \tag{4}$$

el primero de ellos de dimensión n_s y el segundo de dimensión $n_u = n - n_s$. La matriz B_s tiene únicamente autovalores con parte real negativa y la matriz B_u, únicamente autovalores con parte real positiva. Si

$$y^0 = (y_1^0, \ldots, y_{n_s}^0, y_{n_s+1}^0, \ldots, y_n^0)$$

entonces la solución $y(t)$ de (2) que verifica $y(0) = y^0$ está dada por

$$y(t) = e^{tB}y^0 = (e^{tB_s}y_{(s)}^0, e^{tB_u}y_{(u)}^0) \tag{5}$$

donde

$$y_{(s)}^0 = (y_1^0, \ldots, y_{n_s}^0) \quad , \quad y_{(u)}^0 = (y_{n_s+1}^0, \ldots, y_n^0)$$

(Véase el ejemplo 3 del apartado 5.1.)

Se tiene:

$$|y(t)| = |e^{tB}y^0| = |e^{tB_s}y_{(s)}^0| + |e^{tB_u}y_{(u)}^0| \tag{6}$$

Si, en particular, $y_{(u)}^0 = (0, \ldots, 0)$, entonces:

$$|y(t)| = |e^{tB_s}y_{(s)}^0| \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

de acuerdo con el teorema 1 del apartado anterior. Por el contrario, con que una sola de las componentes de

$$y_{(u)}^0 = (y_{n_s+1}^0, \ldots, y_n^0)$$

sea distinta de 0, se tendrá, por el corolario al teorema 2 del apartado anterior, que

$$|e^{tB_u}y_{(u)}^0| \to \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

y, en consecuencia, por (6), que

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$$

Así que en las variables y, las soluciones que convergen a 0 cuando $t \to \infty$ son aquellas correspondientes a condiciones iniciales y^0 que son combinación lineal de los n_s vectores canónicos:

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \tilde{e}_{n_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \ (n_s \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Y obsérvese que, de acuerdo con (4) y (5), dichas soluciones permanecen para todo $t \in \mathbb{R}$ en el subespacio $\tilde{E}^s$ engendrado por los vectores (7). Si deshacemos ahora el cambio de variables, $x = Py$, las soluciones que convergen a cero cuando $t \to \infty$ serán aquellas correspondientes a condiciones iniciales en el subespacio

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x = Py, \quad \text{con} \quad y \in \tilde{E}^s\} \tag{8}$$

Definición 2. *Se denomina subespacio estable del sistema* $x' = Ax$ *al subespacio* E^s *definido en* (8).

Si recordamos que la columna *j-ésima* de una matriz es el vector que resulta al aplicar la matriz al vector $(0, \ldots, \overset{(j)}{1}, \ldots, 0)$, tendremos, dado que P es no singular, que E^s es el subespacio engendrado por los vectores

$$P\tilde{e}_j = v^j \quad , \quad j = 1, \ldots, n_s$$

es decir, por las n_s primeras columnas de la matriz de paso P (dada B, la forma canónica, en la forma (3)). Toda solución que comienza en E^s (o sea, con $x(0) \in E^s$) permanece para todo $t \in \mathbb{R}$ (es decir, $x(t) \in E^s$), de acuerdo con lo dicho para $\tilde{E}^s$. Si, por ejemplo, la matriz A es diagonalizable, E^s estará engendrado por n_s autovectores linealmente independientes correspondientes a los autovalores negativos de la matriz A.

Volviendo al sistema (4), si consideramos una condición inicial $(y^0_{(s)}, y^0_{(u)})$ con $y^0_{(s)} = (0, \ldots, 0)$, la correspondiente solución será:

$$y(t) = (0, e^{tB_u} y^0_{(u)})$$

la cual permanecerá para todo $t \in \mathbb{R}$ en el subespacio $\tilde{E}^u$ engendrado por los $(n - n_s)$ vectores canónicos

$$\tilde{e}_{n_s+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\ (n_s+1) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \tilde{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

y verificará, de acuerdo con (6), que

$$\lim_{t \to \infty} |y(t)| = \infty$$

si $y^0_{(u)} \neq (0, \ldots, 0)$.

Definición 3. *El subespacio*

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x = Py, \ \text{con} \ y \in \tilde{E}^u\}$$

se denomina subespacio inestable del sistema $x' = Ax$.

Análogamente a lo dicho para E^s, será el subespacio engendrado por las $(n - n_s)$ últimas columnas de la matriz de paso P (escrita B, la forma canónica real, en la forma (3)). Si, por ejemplo, A es diagonalizable, E^u será el subespacio engendrado por $(n - n_s)$ autovectores linealmente independientes correspondientes a los $(n - n_s)$ autovalores positivos. Si $x(0) \in E^u$, entonces $x(t) \in E^u$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por la propiedad análoga para $\tilde{E}^u$.

En resumen, se tiene la siguiente proposición.

Proposición. *Sea* $x' = Ax$ *un sistema lineal hiperbólico de índice de estabilidad* n_s.

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, y E^s *y* E^u *son invariantes para el sistema, es decir, si* $x \in E^i$, $i = s, u$, *entonces* $e^{tA}x \in E^i$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *La dimensión de* E^s *es* n_s *y la de* E^u *es* $n - n_s$.

2. *Existen* $\eta > 0$ *y* $M > 0$ *tales que*

a) $|e^{tA}x| \leqslant Me^{-\eta t}|x|$, *para* $x \in E^s$, $t \geqslant 0$.

b) $|e^{tA}x| \geqslant M^{-1}e^{\eta t}|x|$, *para* $x \in E^u$, $t \geqslant 0$.

c) $|e^{tA}x| \geqslant M^{-1}e^{-\eta t}|x|$, *para* $x \in E^s$, $t \leqslant 0$.

d) $|e^{tA}x| \leqslant Me^{\eta t}|x|$, *para* $x \in E^u$, $t \leqslant 0$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Que $\mathbb{R}^n$ es *suma directa* de E^s y E^u, lo que se denota por $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, quiere decir que

a) $E^s \cap E^u = \{0\}$.

b) Todo $x \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar de modo único como una suma

$$x = x_s + x_u, \quad \text{con} \quad x_s \in E^s \quad \text{y} \quad x_u \in E^u$$

Ambas propiedades se deducen fácilmente de las correspondientes afirmaciones para $\tilde{E}^s$ y $\tilde{E}^u$, y es evidente que $\tilde{E}^s$ y $\tilde{E}^u$ sólo tienen en común el vector (0, ..., 0) y que cualquier $y = (y_1, ..., y_n)$ se puede escribir de modo único como una suma

$$y = y_s + y_u, \quad \text{con} \quad y_s \in \tilde{E}^s \quad \text{y} \quad y_u \in \tilde{E}^u$$

Las afirmaciones sobre la invariancia y la dimensión de E^s y E^u están contenidas en los argumentos previos a esta proposición.

2. Las estimaciones *a*) y *b*) resultan de (6) y de los teoremas 1 y 2 del apartado anterior aplicados a B_s y B_u, respectivamente (y teniendo en cuenta, además, la relación $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$).

En cuanto a *c*), hagamos $t' = -t \geqslant 0$ y apliquemos *a*):

$$|x| = |e^{(t'+t)A}x| = |e^{t'A}(e^{tA})| \leqslant Me^{-\eta t'}|e^{tA}x| = Me^{\eta t}|e^{tA}x|$$

de donde

$$|e^{tA}x| \geqslant M^{-1}e^{-\eta t}|x|$$

y análogamente para *d*).

Para un atractor se tiene que $E^s = \mathbb{R}^n$ y $E^u = \{0\}$, y para una fuente, $E^s = \{0\}$ y $E^u = \mathbb{R}^n$. En el caso de un punto de silla en el plano, $E^s = N(A - \lambda I)$ y $E^u = N(A - \mu I)$, siendo λ el autovalor negativo de A y μ el positivo (Fig. 2).

Obsérvese que E^s, el espacio propio correspondiente a λ, consta de tres trayectorias, el origen y dos semirrectas que convergen al origen cuando $t \to \infty$. Estas dos trayectorias no nulas se alejan del origen cuando $t \to -\infty$. E^u, el espacio propio de μ, consta también de tres trayectorias, el origen (vemos cómo $E^s \cap E^u = \{0\}$) y dos trayectorias que se alejan del origen cuando $t \to \infty$ y convergen a él cuando $t \to -\infty$. Las demás trayectorias del sistema, o sea, las que pasan por puntos $x \notin E^s \cup E^u$, tienen el aspecto de hipérbolas y convergen a ∞, lo mismo cuando $t \to \infty$ que cuando $t \to -\infty$.

Este comportamiento es típico para los sistemas hiperbólicos, de acuerdo con la proposición anterior. Así, la desigualdad *a*) implica que todas las trayectorias que pasan por puntos de E^s (contenidas completamente en E^s) convergen exponencialmente al origen cuando $t \to \infty$ mientras que, por la desigualdad *c*), se alejan exponencialmente del origen cuando $t \to -\infty$. Así pues, el comportamiento de un siste-

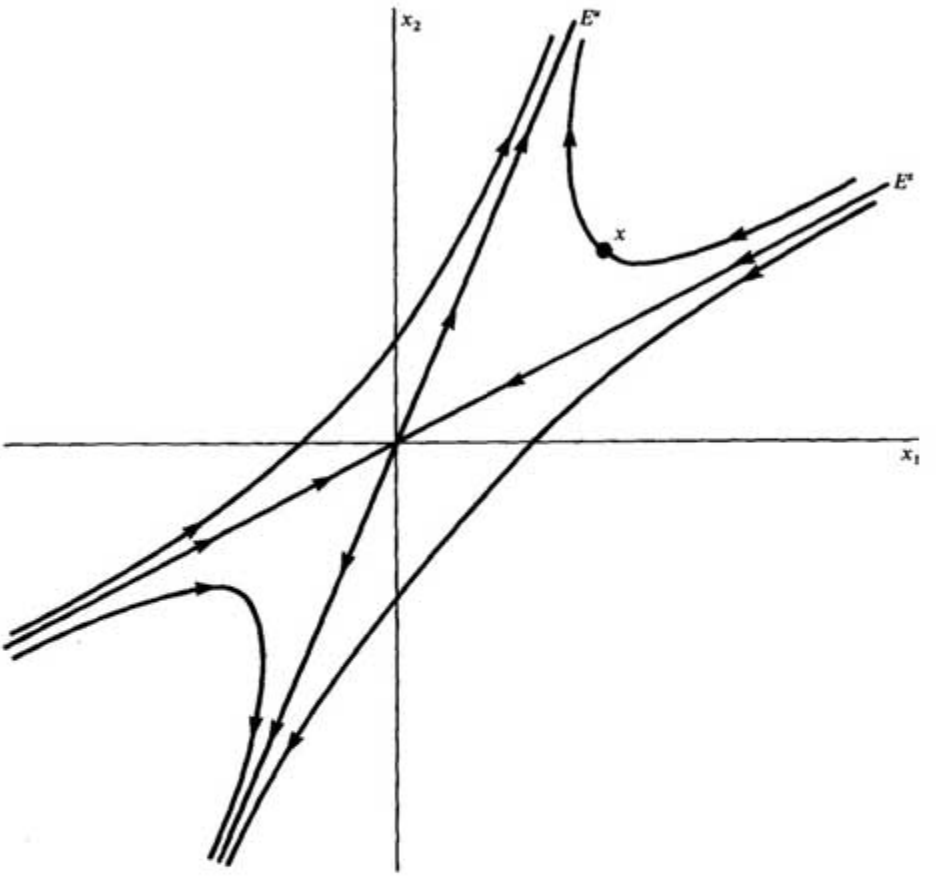


Figura 2

ma hiperbólico sobre el subespacio estable E^s es el de un atractor. De manera análoga, el comportamiento sobre el subespacio inestable E^u es el de una fuente. En cuanto al comportamiento de las trayectorias que pasen por puntos x que no están ni en E^s ni en E^u, es análogo al visto en el caso del punto de silla en el plano. Como e^{tA} es lineal, se tendrá:

$$e^{tA}x = e^{tA}x_s + e^{tA}x_u$$

donde $x = x_s + x_u$, con $x_s \in E^s$ y $x_u \in E^u$ ($x_s \neq 0$, $x_u \neq 0$ al ser $x \notin E^s \cup E^u$); $e^{tA}x_s \in E^s$ y $e^{tA}x_u \in E^u$, por la invariancia de E^s y E^u, y representan las *componentes* de $e^{tA}x$ según E^s y E^u, respectivamente. Cuando $t \to \infty$, $e^{tA}x_s \to 0$ y $|e^{tA}x_u| \to \infty$, mientras que cuando $t \to -\infty$, $|e^{tA}x_s| \to \infty$ y $e^{tA}x_u \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{t \to \pm\infty} |e^{tA}x_s| = \infty$$

En la figura 3 se representan los diagramas de fases de algunos ejemplos de sistemas hiperbólicos en $\mathbb{R}^3$.

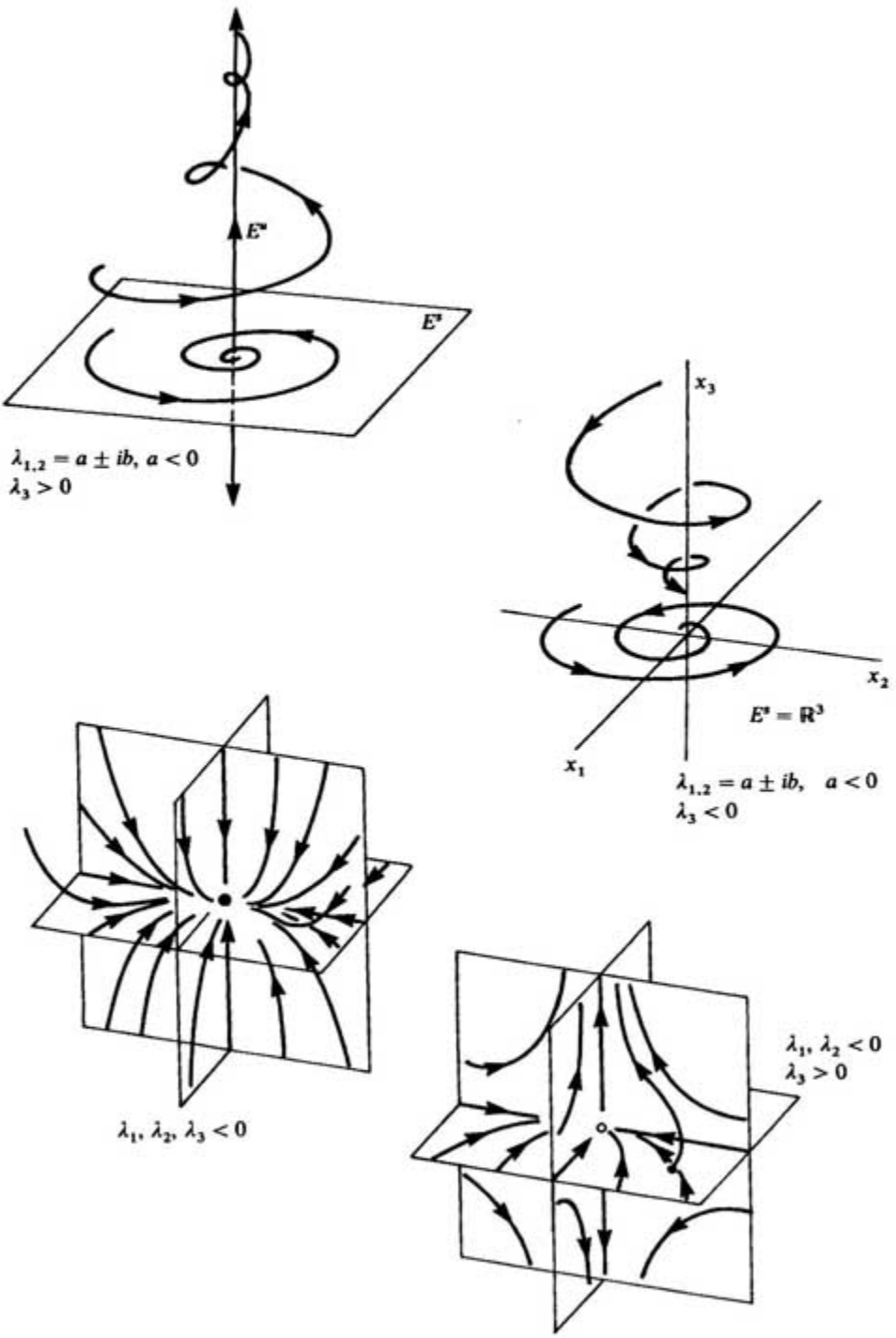

E^s
E^u
$\lambda_{1,2} = a \pm ib,\ a < 0$
$\lambda_3 > 0$
x_3
x_2
x_1
$E^s = \mathbb{R}^3$
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$
$\lambda_3 < 0$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$
$\lambda_3 > 0$

Figura 3

EJEMPLO. Sea el sistema $x' = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $-1 \pm i$, 1, -1, con lo que la forma canónica real de A es

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Los autovectores correspondientes a $-1 + i$ son las soluciones de

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomemos, por ejemplo, la solución

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, tomamos una primera y segunda columnas de la matriz de paso P

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como autovector correspondiente a -1, solución de $(A + I)x = 0$, podemos tomar

$$v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el *subespacio estable* es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 3 engendrado por los vectores v^1, v^2, v^3, es decir, se trata del hiperplano de ecuación $x_4 = 0$.

El *subespacio inestable* es el subespacio propio del autovalor $\lambda = 1$, a saber, el subespacio de dimensión 1 (o sea, una recta) engendrado por el vector

$$v^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que tiene por ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

NOTA. Aunque la definición que hemos dado de los subespacios E^s y E^u depende de la matriz de paso P, dichos subespacios se pueden caracterizar de un modo «intrínseco», dependiente solamente de la matriz A (o, más bien, del comportamiento asintótico de e^{tA} sobre ellos). Se tiene, en efecto, el siguiente resultado: *Sea* $x' = Ax$ *un sistema hiperbólico;* 1) *Un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a* E^s *si, y sólo si,* $e^{tA}x \to 0$ *cuando* $t \to \infty$. 2) *Un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a* E^u *si, y sólo si,* $e^{tA}x \to 0$ *cuando* $t \to -\infty$.

Para probar, por ejemplo, la primera afirmación, escribamos $x = x_s + x_u$, con $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$, lo que implica $e^{tA}x = e^{tA}x_s + e^{tA}x_u$. De acuerdo con *b*) de la proposición vista, se tendrá

$$M^{-1}e^{\pi t}|x_u| \leqslant |e^{tA}x_u| \leqslant |e^{tA}x| + |e^{tA}x_s|$$

con lo que, si se supone que $|e^{tA}x| \to 0$ cuando $t \to \infty$, ha de ser necesariamente $x_u = 0$ (o sea, $x \in E^s$) dado que ya se tiene $|e^{tA}x_s| \to 0$. La afirmación relativa al subespacio inestable E^u se demuestra de manera análoga. (Compruébese que la caracterización de E^s y E^u puede también expresarse así: $x \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a* E^s *si, y sólo si,* e^{tA} *permanece acotado para* $t \geqslant 0$; $x \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a* E^u *si, y sólo si,* $e^{tA}x$ *permanece acotado para* $t \leqslant 0$.)

El subespacio estable resulta ser el subespacio maximal E^s de $\mathbb{R}^n$ invariante por A tal que la restricción a él de A, A/E^s, tiene todos sus autovalores con parte real

negativa. Análogamente, el subespacio inestable de $x' = Ax$ queda caracterizado como el subespacio maximal invariante E^u tal que A/E^u tiene todos sus autovalores con parte real positiva.

6.3. Soluciones acotadas. Soluciones periódicas

Hemos visto que si A posee un autovalor λ tal que $\operatorname{Re}\lambda < 0$, entonces existen soluciones $x(t)$ de $x' = Ax$ que convergen a 0 para $t \to \infty$ (y, por tanto, están acotadas para $t \in [a, \infty)$ cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$) mientras que $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to -\infty$ y, por tanto, no están acotadas para $t \in (-\infty, \infty)$. De modo análogo, si A tiene algún autovalor λ con parte real positiva, existen soluciones $x(t)$ tales que $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y $x(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$.

Así pues, para que *todas* las soluciones de $x' = Ax$ sean acotadas para $t \in (-\infty, \infty)$ es *necesario* que $\operatorname{Re}\lambda = 0$ para todo autovalor λ de A. Pero esta condición *no es suficiente*. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces las soluciones de $x' = Ax$ son, como sabemos,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

que no están acotadas en $(-\infty, \infty)$ si $k_2 \neq 0$ (las soluciones acotadas forman el subespacio de dimensión 1 $x(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k_1 \in \mathbb{R}$).

Ya se intuye que eso mismo ocurrirá en un sistema $x' = Ax$ más general para el que se tenga $\operatorname{Re}\lambda = 0$ para todos los autovalores, si en la forma canónica de A hay bloques elementales con unos en la primera paralela a la diagonal principal, o sea, si hay algún autovalor λ para el cual la multiplicidad (algebraica) es mayor que el número de autovectores linealmente independientes que le corresponden (o sea, que $\dim N(A - \lambda I)$ = número de bloques elementales asociados a λ = multiplicidad geométrica de λ). En efecto, si ocurriese eso, y hubiese en la forma canónica de Jordan de A,

$$B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_s\}$$

un bloque B_l de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = ib$$

ocupando en B la intersección de las filas $m+1$ hasta la $m+n_l$ con las columnas de los mismos índices ($n_l > 1$), entonces, la solución del sistema

$$y' = By$$

correspondiente a la condición inicial $y^0 = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, con el 1 en la posición $m+n_l$, es la función $e^{tB}y^0$ que tiene nulas todas las coordenadas excepto las que van del índice $m+1$ hasta el $m+n_l$, que están dadas por

$$e^{tB_l}\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot(n_l\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix} = e^{ibt}\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n_l-1}/(n_l-1)!\\ & 1 & t & \cdots & \vdots\\ & & \cdot & & t^2/2\\ & & & \cdot & t\\ & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$= (\cos bt + i \operatorname{sen} bt)\begin{bmatrix}t^{n_l-1}/(n_l-1)!\\ \vdots\\ t^2/2\\ t\\ 1\end{bmatrix}$$

Tomando, por ejemplo, la parte real de esa solución, se tiene una solución real $y(t)$ de $y' = By$ que *no* está acotada en $(-\infty, \infty)$ y que proporciona una solución real de $x' = Ax$:

$$x(t) = Py(t)$$

que no está acotada en $(-\infty, \infty)$, ya que, como argumentábamos para el comportamiento asintótico en el apartado anterior:

$$|y(t)| = |P^{-1}x(t)| \leqslant |P^{-1}||x(t)|$$

de donde

$$|x(t)| \geqslant |P^{-1}|^{-1}|y(t)|$$

Por el contrario, si todos los bloques B_k de la matriz de Jordan B son matrices 1×1 (o sea, A es diagonalizable en $\mathbb{C}^n$), entonces todas las soluciones de $x' = Ax$ están acotadas en $(-\infty, \infty)$, de acuerdo con el teorema 3 del apartado 5.2 que da la estructura de las soluciones del sistema. Se tiene, por tanto, el siguiente teorema.

Teorema 1. *Para que todas las soluciones de $x' = Ax$ estén acotadas en $(-\infty, \infty)$ es necesario y suficiente que se tenga para todo autovalor de A:*

a) $\operatorname{Re}\lambda = 0$, *y*

b) $\dim N(A - \lambda I) =$ *la multiplicidad (algebraica) de* λ. *(Equivalentemente, A posee n autovectores linealmente independientes, es decir, es diagonalizable en* $\mathbb{C}^n$.*)*

Con argumentos análogos a los anteriores, analizando la forma canónica de Jordan B, resulta también el siguiente teorema.

Teorema 2. *Supongamos que* $\lambda = ib \neq 0$ *es un autovalor imaginario puro de A y sea* $\delta = \dim N(A - \lambda I)$, *como subespacio de* $\mathbb{C}^n$. *Entonces, el conjunto de soluciones periódicas de* $x' = Ax$ *de período (mínimo)* $2\pi/b$ *es un subespacio vectorial de dimensión* 2δ.

La idea de la demostración es la siguiente: retomando los argumentos que conducen al teorema 1, las soluciones periódicas de período $2\pi/b$ (complejas) del sistema $y' = By$, siendo B la matriz de Jordan de A, provienen de los bloques B_l correspondientes al autovalor ib y de los $\bar{B}_l$ correspondientes a su conjugado $-ib$, tomando ahora, para cada uno de ellos, condiciones iniciales de la forma $y^0 = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ con el 1 en la posición $m + 1$, que dan soluciones con todas las coordenadas nulas excepto las correspondientes a

$$e^{tB_l}\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot (n_l \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = e^{ibt}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n_l-1}/(n_l-1)! \\ & 1 & t & \cdots & \vdots \\ & & & & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{ibt}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (\cos bt + i \operatorname{sen} bt)\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y lo mismo para $\bar{B}_l$.

De estas soluciones periódicas hay tantas como bloques correspondientes a $\lambda = ib$, es decir, $\delta = \dim N(A - \lambda I)$, y el mismo número correspondiente a $-ib$, ya que $\dim N(A - \lambda I) = \dim N(A - \bar{\lambda} I)$. Son linealmente independientes (pues corresponden a condiciones iniciales linealmente independientes) y no hay otras linealmente independientes con ellas. Y cualquier combinación lineal de ellas también es solución con período (mínimo) $2\pi/b$.

Al deshacer el cambio de variables, $x = Py$, las funciones $x(t) = Py(t)$ también son periódicas de período (mínimo) $2\pi/b$. Se tendría así un subespacio de dimensión 2δ de soluciones complejas de período $2\pi/b$ de $x' = Ax$, engendrado por las 2δ soluciones que tienen por condiciones iniciales los δ autovectores $v^1, \ldots, v^\delta$ correspondientes a ib y los δ autovectores $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^\delta$ correspondientes a $-ib$, teniendo en

cuenta, como se recordaba en el apartado anterior, que la columna v^j de la matriz de paso P representa el vector que se obtiene al aplicar P al vector $(0, ..., 1, ..., 0)$, con el 1 en el lugar j.

Si se toman los vectores reales

$$\operatorname{Re} v^1, \operatorname{Im} v^1, ..., \operatorname{Re} v^\delta, \operatorname{Im} v^\delta$$

como condiciones iniciales, las correspondientes soluciones engendrarán el subespacio vectorial de dimensión 2δ de las soluciones de $x' = Ax$ de período (mínimo) $2\pi/b$. (Podríamos haber llegado también a este resultado analizando directamente la forma canónica *real* de A.)

Los mismos argumentos nos llevan a que *el conjunto de soluciones acotadas en* $(-\infty, \infty)$ *es un subespacio vectorial de dimensión igual al número de bloques elementales de la forma canónica de Jordan correspondientes a autovalores con parte real nula* ($\lambda = 0$, por un lado, y los de la forma $\pm ib$, con $b > 0$). Así, en el ejemplo 7 del apartado 5.3, hay tres soluciones acotadas en $(-\infty, \infty)$ linealmente independientes.

EJEMPLO 1. El sistema $x' = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

del ejemplo 5 del apartado 5.3 tiene dos soluciones de período π linealmente independientes (los autovalores eran $\pm 2i$ dobles y $\dim N(A - (2i)I) = 1$), correspondientes a las condiciones iniciales

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(las dos primeras columnas de la matriz P de paso a la forma canónica real de A), a saber,

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \\ 0 \\ \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \\ 0 \\ -\cos 2t \end{bmatrix}$$

Consideremos una matriz cualquiera A y escribamos su forma canónica real B ordenando los bloques elementales de modo que aparezcan en primer lugar los correspondientes a los autovalores con parte real negativa (que se suponen en número de n_s), a continuación los correspondientes a los de parte real nula (respectivamente, n_c) y, finalmente, los correspondientes a los de parte real positiva (respectivamente, n_u):

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} B_s \\ (\mathrm{Re}\ \lambda < 0) \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} B_c \\ (\mathrm{Re}\ \lambda = 0) \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} B_u \\ (\mathrm{Re}\ \lambda > 0) \end{matrix} \end{array}\right] \tag{1}$$

B_s es de dimensión $n_s \times n_s$ (y tiene todos sus autovalores con parte real negativa), B_c de dimensión $n_c \times n_c$ (respectivamente, nula) y B_u de dimensión $n_u \times n_u$ (respectivamente, positiva), siendo $n_s + n_c + n_u = n$.

Como en el apartado anterior, el sistema canónico

$$y' = By \tag{2}$$

se desacopla en *tres* subsistemas

$$\begin{cases} y'_{(s)} = B_s y_{(s)} \\ y'_{(c)} = B_c y_{(c)} \\ y'_{(u)} = B_u y_{(u)} \end{cases} \tag{3}$$

de modo que la solución de (2) correspondiente a la condición inicial

$$y^0 = (y_1^0, \ldots, y_{n_s}^0, y_{n_s+1}^0, \ldots, y_{n_s+n_c}^0, \ldots, y_n^0)$$

es

$$e^{tB}y^0 = (e^{tB_s}y_{(s)}^0, e^{tB_c}y_{(c)}^0, e^{tB_u}y_{(u)}^0) \tag{4}$$

donde

$$\begin{cases} y_{(s)}^0 = (y_1^0, \ldots, y_{n_s}^0) \\ y_{(c)}^0 = (y_{n_s+1}^0, \ldots, y_{n_s+n_c}^0) \\ y_{(u)}^0 = (y_{n_s+n_c+1}^0, \ldots, y_n^0) \end{cases} \tag{5}$$

Como en el apartado anterior, se definen los subespacios invariantes $\tilde{E}^s$ y $\tilde{E}^u$ así como un *nuevo subespacio* $\tilde{E}^c$ engendrado por los n_c vectores

$$\tilde{e}_{n_s+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1\,(n_s+1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \tilde{e}_{n_s+n_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1\,(n_s+n_c \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\tilde{E}^c$ es también invariante para el sistema $y' = By$, es decir, si $y^0 \in \tilde{E}^c$, entonces $e^{tB}y^0 \in \tilde{E}^c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si, por ejemplo, todos los autovalores con parte real nula son simples (o, más generalmente, si todos los bloques elementales de B_c son unidimensionales o bien de la forma $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ asociados a los autovalores complejos $\pm ib$), entonces todas las soluciones $e^{tB}y^0$ con $y^0 \in \tilde{E}^c$ son acotadas en $(-\infty, \infty)$, algunas de ellas, posiblemente, periódicas (si hay autovalores de la forma $\pm ib$ con $b \neq 0$).

Definición. *Se denomina subespacio centro del sistema* $x' = Ax$ *al subespacio*

$$E^c = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; x = Py \;,\; \text{con } y \in \tilde{E}^c\} \tag{7}$$

E^c estará engendrado (véase apartado 6.2) por las columnas

$$v^{n_s+1} \ldots v^{n_s+n_c}$$

de la matriz de paso P, escrita B, la forma canónica real de A, en la forma (1). Si, por ejemplo, B_c tiene sólo bloques unidimensionales correspondientes al autovalor $\lambda = 0$ y bidimensionales $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ correspondientes a autovalores complejos $\pm ib$, entonces E^c estará engendrado por tantos autovectores linealmente independientes de $\lambda = 0$ como multiplicidad tenga este autovalor junto con los vectores $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, recorriendo w los autovectores linealmente independientes correspondientes a los autovalores de la forma ib con $b > 0$.

E^c es un subespacio *invariante* para el sistema $x' = Ax$, es decir, si $x^0 \in E^c$, entonces $e^{tA}x^0 \in E^c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En el caso especial de B_c que acabamos de considerar (que se da, por ejemplo, si todos los autovalores con $\operatorname{Re}\lambda = 0$ son simples), todas las soluciones $e^{tA}x^0$ con $x^0 \in E^c$ son acotadas, algunas de ellas periódicas si hay autovalores de la forma $\pm ib$ con $b \neq 0$. Finalmente, es claro que se tiene

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

EJEMPLO 2. En el caso *centro* de $\mathbb{R}^2$ (o sea, A con un par de autovalores imaginarios conjugados $\pm ib$) se tiene $E^c = \mathbb{R}^2$ y $E^s = E^u = \{0\}$. Las soluciones de $x' = Ax$ son todas periódicas de período $2\pi/b$.

EJEMPLO 3. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son 0 y -2. Se tiene: $E^s = N(A + 2I) = \{(1, -2)\}$, $E^c = N(A - 0 \cdot I) = \{(1, 0)\}$ y $E^u = \{0\}$.

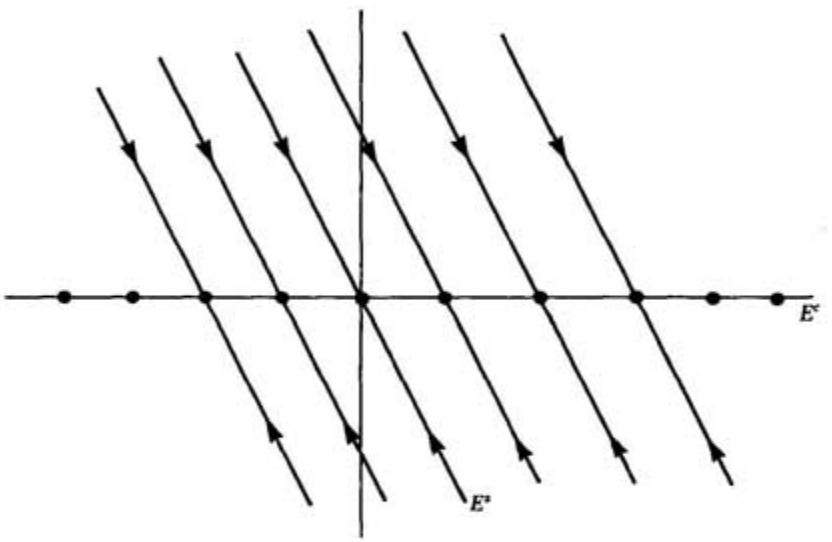


Figura 4

EJEMPLO 4. Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

los autovalores son -2, 0, 2. Entonces:

$$E^s = N(A + 2I) + \{(1, -1, 0)\}$$
$$E^c = N(A - 0 \cdot I) = \{(0, 0, 1)\}$$
$$E^u = N(A - 2I) = \{(1, 3, 0)\}$$

El aspecto del diagrama de fases (en $\mathbb{R}^3$) del sistema $x' = Ax$ se muestra en la figura 5.

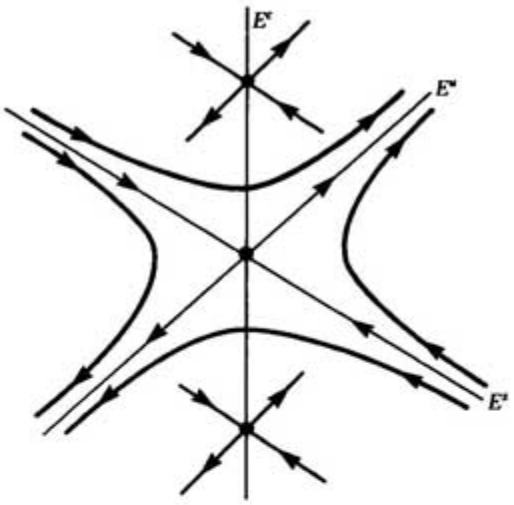


Figura 5

EJEMPLO 5. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$E^s = \{(0, 0, 1)\},\ E^c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ y } E^u = \{0\}$$

La figura 6 muestra el aspecto del diagrama de fases del sistema $x' = Ax$.

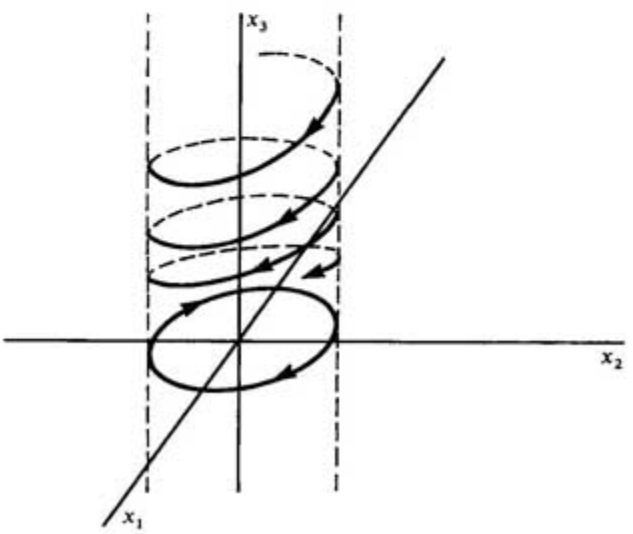


Figura 6

EJEMPLO 6. Sea el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_3 + x_4 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = -x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

Se trata de identificar en $\mathbb{R}^4$ los subespacios de condiciones iniciales que dan lugar a:

a) soluciones que convergen a 0 cuando $t \to \infty$;
b) soluciones que convergen a 0 cuando $t \to -\infty$;
c) soluciones acotadas en $[0, \infty)$;
d) soluciones acotadas en $(-\infty, 0]$;
e) soluciones acotadas en $(-\infty, \infty)$, y
f) soluciones periódicas.

La ecuación característica es:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

con lo que los autovalores son -1, $\pm i$, 1. La forma canónica real de A (escrita en la forma (1)) es:

$$B = \left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & & & \\ \hline & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

Los autovalores con parte real nula, o sea, $\pm i$, son *simples*, por lo que las soluciones $e^{tA}x^0$ con $x^0 \in E^c$ son acotadas en $(-\infty, \infty)$ y son las únicas con esa propiedad. Son además periódicas de período (mínimo) 2π, de acuerdo con el teorema 2 y según se deduce inmediatamente de la forma del sistema $y' = By$ y de la relación $x(t) = Py(t)$. Así pues, la respuesta a *e*) y *f*) es E^c, el subespacio centro.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$x = x_s + x_c + x_u$$

con $x_s \in E^s$, $x_c \in E^c$, $x_u \in E^u$, determinados por x univocamente. Entonces:

$$e^{tA}x = e^{tA}x_s + e^{tA}x_c + e^{tA}x_u$$

y

$$|e^{tA}x| = |e^{tA}x_s| + |e^{tA}x_c| + |e^{tA}x_u|$$

de donde se deduce que:

— la respuesta a *a*) es E^s;
— la respuesta a *b*) es E^u;
— la respuesta a *c*) es $E^s \oplus E^c$, y
— la respuesta a *d*) es $E^u \oplus E^c$.

Se tiene:

$$E^s = N(A + 1 \cdot I) = \{(-1, -2, 0, 1)\}, \quad E^u = N(A - 1 \cdot I) = \{(1, 0, -1, 0)\}$$
$$\text{y} \quad E^c = \{\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w\}$$

siendo w un autovector (complejo) del autovalor i. Operando, se tiene, por ejemplo, $w = \{(1, 0, 0, i)\}$, de donde $E^c = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, o sea el plano de ecuaciones cartesianas $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$$E^s \oplus E^c = \{(-1, -2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

o sea, el hiperplano de ecuación $x_3 = 0$. Análogamente,

$$E^u \oplus E^c = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

o sea, el hiperplano de ecuación $x_2 = 0$.

6.4. Sistemas no autónomos

A) Sistemas homogéneos con coeficientes variables

Nos planteamos aquí las cuestiones cualitativas mencionadas al comienzo del capítulo referidas al sistema

$$x' = A(t)x \tag{1}$$

siendo $A(t)$ continua en un intervalo $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Hay resultados generales relativos al sistema (1) (véase Coppel, [3]) que no vamos a tratar aquí, entre otras razones porque la verificación en la práctica de las correspondientes hipótesis es, en general, difícil.

Una situación especial muy interesante se presenta cuando $A(t)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es *periódica*. En el siguiente apartado, 6.5, se desarrollan los elementos de la *teoría de Floquet* relativa a este caso.

Otra situación especial interesante se da cuando

$$A(t) = A + C(t) \tag{2}$$

donde A es una matriz constante y $C(t)$ una matriz continua en (α, ω) ($C(t)$ repre-

senta una «perturbación no autónoma» de A). Es natural esperar que si $C(t)$ es, en algún sentido, «pequeña» cuando $t \to \infty$, las soluciones del sistema

$$x' = (A + C(t))x \tag{3}$$

se comporten, para t grande, más o menos como las soluciones de $x' = Ax$. Se tiene, en efecto, el siguiente teorema.

Teorema 1. *Supongamos que*

a) $C(t)$ *es continua en* (α, ∞);

b) $|C(t)| \to 0$ *cuando* $t \to \infty$;

c) Todas las soluciones de $x' = Ax$ *convergen a* 0 *cuando* $t \to \infty$.

Entonces, todas las soluciones de $x' = (A + C(t))x$ *convergen a* 0 *cuando* $t \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t)$ una solución cualquiera de $x' = (A + C(t))x$. Obsérvese que, tomando un $t_0 > \alpha$ arbitrario, $x(t)$ puede escribirse en la forma

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}C(s)x(s)ds, \; t \in (\alpha, \infty) \tag{4}$$

fórmula que se comprueba por simple derivación, y que está sugerida por el método de variación de las constantes aplicado a $x' = Ax + C(t)x$, contemplando $C(t)x(t)$ como un término no homogéneo $b(t)$.

La hipótesis *c*) significa, como sabemos, que existen constantes $\eta > 0$, $M > 0$ tales que

$$|e^{tA}x| \leqslant Me^{-\eta t}|x|, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \; t \geqslant 0 \tag{5}$$

Se tiene entonces de (4) para $t \geqslant t_0$,

$$|x(t)| \leqslant Me^{-\eta(t-t_0)}|x(t_0)| + M\int_{t_0}^{t} e^{-\eta(t-s)}|C(s)|\,|x(s)|ds \tag{6}$$

Sea $K > 0$ tal que $MK < \eta$. Dado que $\lim |C(t)| = 0$ para $t \to \infty$, por *c*), existe un t_0 positivo tal que

$$|C(t)| \leqslant K \quad \text{para} \quad t \geqslant t_0$$

Con ese t_0, se deduce de (6) que

$$|x(t)| \leqslant (Me^{\eta t_0}|x(t_0)|)e^{-\eta t} + MKe^{-\eta t}\int_{t_0}^{t} e^{\eta s}|x(s)|ds$$

Es decir,

$$|x(t)|e^{\eta t} \leqslant L + MK \int_{t_0}^{t} |x(s)|e^{\eta s} ds \quad , \quad t \geqslant t_0 \tag{7}$$

con $L = Me^{\eta t_0}|x(t_0)|$. Por la desigualdad de Gronwall (lema 1, apartado 2.2), de (7) resultará:

$$|x(t)|e^{\eta t} \leqslant Le^{MK(t-t_0)} \quad , \quad t \geqslant t_0$$

Es decir,

$$|x(t)| \leqslant Le^{-MKt_0}e^{(MK-\eta)t} \quad , \quad t \geqslant t_0$$

De donde

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$$

dado que $MK - \eta < 0$.

EJEMPLO 1. Consideremos la ecuación

$$x'' + \left(2 + \frac{1}{t}\right)x' + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)x = 0 \tag{8}$$

Si la escribimos en forma de sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 1/t^2 & -2 - 1/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

vemos que, para $t > 0$, la matriz de los coeficientes se puede descomponer en la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/t^2 & -1/t \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ son -1 doble, con lo que todas las soluciones de $x' = Ax$ convergen a 0 para $t \to \infty$. La matriz

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/t^2 & -1/t \end{bmatrix}$$

verifica $\lim |C(t)| = 0$ cuando $t \to \infty$, con lo que se puede aplicar el teorema y se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} (|x(t)| + |x'(t)|) = 0$$

para toda solución $x(t)$ de la ecuación (8).

Paralelamente al teorema 1 se tiene el siguiente resultado relativo a la *acotación* de las soluciones de la ecuación (3) para $t \to \infty$.

Teorema 2. *Supongamos que*

a) $C(t)$ *es continua en* (α, ∞);

b) $\int_{t_0}^{\infty} |C(t)|dt < +\infty$ *para algún* $t_0 > \alpha$;

c) Todas las soluciones de $x' = Ax$ *son acotadas en el intervalo* (t_0, ∞).

Entonces, todas las soluciones de $x' = (A + C(t))x$ *están acotadas en el intervalo* (t_0, ∞).

DEMOSTRACIÓN. Escribamos de nuevo la ecuación

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}C(s)x(s)ds, \quad t \in (\alpha, \infty) \tag{9}$$

para una solución cualquiera $x(t)$ de $x' = (A + C(t))x$. La hipótesis *c)* implica que

$$|e^{(t-t_0)A}| \leqslant M$$

para todo $t \geqslant t_0$. Resulta entonces, de (9), para $t \geqslant t_0$,

$$|x(t)| \leqslant M|x(t_0)| + M \int_{t_0}^{t} |C(s))| \, |x(s)|ds \tag{10}$$

Por la desigualdad de Gronwall generalizada (véase problema 2, capítulo 2) se tendrá, de (10):

$$|x(t)| \leqslant M|x(t_0)| \exp\left[M \int_{t_0}^{t} |C(s)|ds \right]$$

de donde, por la hipótesis *b)*, se deduce que $|x(t)|$ está acotada en (t_0, ∞).

EJEMPLO 2. Sea la ecuación

$$x'' - \frac{2}{t^2}x' + x = 0, \quad t > 0 \tag{11}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2/t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t^2 \end{bmatrix} x$$

Las soluciones del sistema $x' = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ son todas acotadas (y periódicas de período 2π, como sabemos). La matriz

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t^2 \end{bmatrix}$$

verifica

$$\int_{t_0}^{\infty} |C(t)|dt = \int_{t_0}^{\infty} (2/t^2)dt = 2/t_0 < +\infty$$

para todo $t_0 \in (0, \infty)$, por lo que todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación (11) verifican que $|x(t)| + |x'(t)|$ está acotado para $t \in [t_0, \infty)$ con cualquier $t_0 > 0$.

Si en lugar de la ecuación (11) consideramos la ecuación

$$x'' - \frac{2}{t}x' + x = 0, \quad t > 0 \tag{12}$$

es fácil comprobar que las funciones

$$\varphi_1(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t \quad , \quad \varphi_2(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t$$

constituyen una base del espacio de soluciones de (12). Vemos, pues, que hay soluciones no acotadas de (12), cualquiera que sea el intervalo (t_0, ∞) considerado. Este ejemplo pone de manifiesto que la hipótesis de que $|C(t)| \to 0$ para $t \to \infty$ (que se hacía en el teorema 1) no basta para asegurar la acotación de las soluciones de $x' = (A + C(t))x$ cuando lo están las de $x' = Ax$. Obsérvese que

$$\int_{t_0}^{\infty} (2/t)dt = \infty$$

cualquiera que sea $t_0 > 0$.

B) Sistemas no homogéneos

Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{13}$$

El objetivo es describir el comportamiento cualitativo de las soluciones de (13), supuesto que se conoce el de las soluciones de la ecuación homogénea asociada

$$x' = A(t)x \tag{14}$$

Se supone que $A(t)$ y $b(t)$ son continuas en un intervalo de la forma (α, ∞), $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene en primer lugar la proposición siguiente.

Proposición 1. *Supongamos que todas las soluciones de* $x' = A(t)x$ *convergen a* 0 *cuando* $t \to \infty$. *Si* $x' = A(t)x + b(t)$ *tiene una solución acotada (respectivamente no acotada, respectivamente convergente a* 0*) cuando* $t \to \infty$, *entonces todas sus soluciones son acotadas (respectivamente no acotadas, respectivamente convergentes a* 0*).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi_1(t)$ una solución de (13) que está acotada en $[t_0, \infty)$, siendo $t_0 > \alpha$. Cualquier otra solución $\varphi_2(t)$ de (13) está dada, como sabemos, por

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + x(t)$$

para una cierta solución $x(t)$ de (14). Puesto que $|x(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$, por hipótesis, $|x(t)|$ estará acotada en $[t_0, \infty)$ y, en consecuencia, lo mismo ocurrirá para $\varphi_2(t)$. Las otras dos propiedades se prueban de manera análoga.

Como resultado afirmativo sobre la existencia de soluciones acotadas tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3. *Supongamos que*

a) *A es una matriz de constantes y todas las soluciones de* $x' = Ax$ *convergen a* 0 *cuando* $t \to \infty$ *(o sea,* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *para todo autovalor* λ *de A).*

b) $b(t)$ *es continua en* (α, ∞) *y acotada en un intervalo* (t_0, ∞), $t_0 > \alpha$.

Entonces, todas las soluciones de $x' = Ax + b(t)$ *están acotadas en el intervalo* (t_0, ∞).

DEMOSTRACIÓN. Las soluciones de $x' = Ax + b(t)$ están dadas por

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds \tag{15}$$

(véase apartado 2.4). Por la hipótesis *a*), existen dos constantes $\eta > 0$, $M > 0$, tales que

$$|e^{tA}x| \leqslant Me^{-\eta t}|x|, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0$$

Entonces, de (15), siendo $|b(t)| \leqslant C$ en (t_0, ∞), resulta:

$$|x(t)| \leqslant M|x(t_0)|e^{-\eta(t-t_0)} + MC\int_{t_0}^{t} e^{-\eta(t-s)}ds \leqslant$$

$$\leqslant M|x(t_0)|e^{-\eta(t-t_0)} + \frac{MC}{\eta}(1 - e^{-\eta(t-t_0)}), \quad t \geqslant t_0$$

Demos también algún resultado relativo a soluciones periódicas:

Teorema 4. *Sea A una matriz de constantes y $b(t)$ continua en $\mathbb{R}$ y periódica de período (mínimo) $T > 0$. Si A no tiene autovalores de la forma $\lambda = 2k\pi i/T$, con k entero, entonces $x' = Ax + b(t)$ tiene una única solución $x(t)$ de período T. Si A no tiene autovalores imaginarios puros, entonces $x(t)$ es la única solución periódica de $x' = Ax + b(t)$ y está dada por*

$$x(t) = \int_{t}^{t+T} [e^{sA}(e^{-TA} - I)e^{-tA}]^{-1}b(s)\,ds \tag{16}$$

DEMOSTRACIÓN

a) Los autovalores de la matriz e^C son los números e^{λ}, recorriendo λ los autovalores de C (véase problema 9 del capítulo 5 y apartado 6.1). Entonces, no siendo $2k\pi i/T$ autovalor de A, se verifica que

$$e^{-T(2k\pi i/T)} = e^{-2k\pi i} = 1$$

no es autovalor de e^{-TA}, es decir, la matriz $(e^{-TA} - I)$ es no singular. Como antes, las soluciones de $x' = Ax + b(t)$ están dadas por

$$x(t) = e^{tA}x^0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds \tag{17}$$

Una solución $x(t)$ es periódica de período T si, y sólo si, $x(T) = x(0) = x^0$ (la necesidad es obvia y para la suficiencia se considera la función $y(t) = x(t + T)$, que también es solución por ser $A(t) \equiv A$ y $b(t)$ de período T; pero $x(T) = x(0)$ implica $y(0) = x(T) = x(0)$, de donde, por la unicidad de solución del problema de valor inicial, se tendrá $x(t) = y(t) = x(t + T)$ para todo t). Así pues, $x(t)$ es periódica de

período T si, y sólo si, $x^0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$ es tal que

$$x^0 = e^{TA}x^0 + e^{TA}\int_0^T e^{-sA}b(s)ds \tag{18}$$

Es decir,

$$(e^{-TA} - I)x^0 = \int_0^T e^{-sA}b(s)ds \tag{19}$$

Como la matriz $(e^{-TA} - I)$ es no singular, la ecuación algebraica (19) tiene una única solución $x_0 \in \mathbb{R}^n$, que determinará, por (17), una única solución de período T de la ecuación $x' = Ax + b(t)$.

b) En cuanto a la unicidad, notemos que si $y(t)$ es otra solución periódica, ha de ser necesariamente de período mT con m un entero mayor que 1 (por la hipótesis de periodicidad sobre $b(t)$). No habiendo autovalores imaginarios puros, se argumenta como antes y llegaríamos a que hay una única solución de período mT, pero ésta es, claro, la $x(t)$ de antes.

Para obtener la fórmula (16) se sustituye el x^0 dado por (19) en (17):

$$x(t) = e^{tA}\left[(e^{-TA} - I)^{-1}\int_0^T e^{-sA}b(s)\,ds\right] + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds =$$

$$= e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1}\left[\int_0^T e^{-sA}b(s)ds + \int_0^t (e^{-TA} - I)e^{-sA}b(s)ds\right] =$$

$$= e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1}\left[\int_0^T e^{-sA}b(s)\,ds + \int_0^t (e^{-(T+s)A} - e^{-sA})b(s)\,ds\right] =$$

$$= e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1}\left[\int_t^T e^{-sA}b(s)\,ds + \int_0^t e^{-(T+s)A}b(s)ds\right] =$$

$$= e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1}\left[\int_t^T e^{-sA}b(s)ds + \int_T^{T+t} e^{-sA}b(s-T)ds\right] =$$

$$= e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1}\int_t^{t+T} e^{-sA}b(s)ds = \int_t^{t+T}[e^{sA}(e^{-TA} - I)e^{-tA}]^{-1}b(s)\,ds$$

En el cálculo anterior se ha utilizado la periodicidad de $b(t)$: $b(s - T) = b(s)$.

Corolario. *Si se verifica*

$$\int_0^T e^{-sA}b(s)ds = 0 \tag{20}$$

la ecuación $x' = Ax + b(t)$ tiene al menos una solución periódica.

En efecto, si se cumple (20), la ecuación algebraica (19) tendrá al menos una solución, incluso aunque $(e^{-TA} - I)$ sea singular.

EJEMPLO 3. Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \cos \omega t + 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

donde $\omega = 2\pi/T$. Los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ son 1 y -1, la forma canónica es $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y una matriz de paso está dada por $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Al no haber autovalores con parte real nula (o sea, el sistema homogéneo no tiene soluciones periódicas), entonces el sistema (21) tiene una solución periódica que, de acuerdo con (16), está dada por

$$x(t) = e^{tA}(e^{-TA} - I)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-sA} b(s)\, ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 & 0 \\ 0 & e^T - 1 \end{bmatrix}^{-1} \int_t^{t+T} \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega s \\ \cos \omega s + 1 \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t(e^{-T} - 1)^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-t}(e^T - 1)^{-1} \end{bmatrix} \int_t^{t+T} \begin{bmatrix} e^{-s} \cos \omega s \\ e^s \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\omega^2} (\omega \operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) \\ \dfrac{1}{1+\omega^2} (\omega \operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) + 1 \end{bmatrix}$$

(Téngase en cuenta, para los cálculos, que $\omega T = 2\pi$.)

6.5. Sistemas periódicos

Consideremos ahora un sistema

$$x' = A(t)x \tag{1}$$

en el que $A(t)$ está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$ y es periódica de período (mínimo) $T > 0$: $A(t + T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Interesa, en particular, estudiar si existen soluciones periódicas de (1) de período T. No ocurre esto, en general. Examinemos el caso de una ecuación escalar:

$$x' = a(t)x \quad ; \quad a(t+T) = a(t) \quad , \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Las soluciones de (2) están dadas, como sabemos, por

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \tag{3}$$

Una función (no trivial, o sea, para $x_0 = x(0) \neq 0$) de la forma (3) será periódica de período T si, y sólo si,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Donde

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \tag{5}$$

Pero el que $a(t)$ sea periódica, no implica que su primitiva

$$\int_0^t a(s)ds$$

lo sea también. Por ejemplo, si $a(t) = \operatorname{sen}^2 t$ se tiene:

$$\int_0^t a(s)ds = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$$

y las soluciones de la correspondiente ecuación (2):

$$x(t) = x(0)\exp\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)$$

no son periódicas.

Obsérvese que

$$\Phi(t+T) = \exp\left(\int_0^{t+T} a(s)\,ds\right) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)\exp\left(\int_t^{t+T} a(s)\,ds\right) = \Phi(t)e^{\lambda T} \tag{6}$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(s)ds \tag{7}$$

es constante por ser $a(t)$ periódica de período T (λ es el *valor medio* de $a(t)$ en cualquier intervalo de la forma $[t, t+T]$, o sea, de longitud igual a un período).

Vemos que $\Phi(t)$ es periódica de período T si, y sólo si, $\lambda = 0$, o bien, si se trata de una función $a(t)$ que toma valores complejos y se consideran, entonces, soluciones también con valores complejos, $\lambda = 2k\pi i/T$, con k un número entero. Por ejemplo, si $a(t)$ es una función *impar* ($a(-t) = -a(t)$) de período T, entonces:

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(s)ds = 0$$

y, en consecuencia, todas las soluciones de $x' = a(t)x$ tienen período T.

En el caso general, hemos probado, de acuerdo con (6), que si $a(t)$ tiene período T, existe un número μ distinto de cero [7], $\mu = e^{\lambda T}$, tal que para toda solución $x(t)$ de $x' = a(t)x$ se verifica

$$x(t+T) = \mu x(t) \quad , \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{8}$$

El número λ se dice que es un *exponente característico* de la ecuación (2), mientras que $\mu = e^{\lambda T}$ es el correspondiente *multiplicador característico*. Mediante el número λ se puede obtener una representación muy útil de las soluciones de la ecuación (2): definamos la función p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$p(t) = \Phi(t)e^{-\lambda t} \tag{9}$$

La función $p(t)$ tiene período T. En efecto:

$$p(t+T) = \Phi(t+T)e^{-\lambda(t+T)} = \Phi(t)e^{\lambda T}e^{-\lambda(t+T)} = \Phi(t)e^{-\lambda t} = p(t)$$

En consecuencia,

$$\Phi(t) = p(t)e^{\lambda t} \tag{10}$$

lo que, de acuerdo con (3), indica que toda solución no trivial de la ecuación $x' = a(t)x$ se puede escribir como el producto de una función de período T y una función exponencial. Mediante esta representación, se puede analizar el comportamiento cualitativo de dichas soluciones. Así, además de lo señalado anteriormente, de que las soluciones de (2) tienen período T si, y sólo si, $\lambda = 2k\pi i/T$, vemos que $x(t) \to 0$ para $t \to \infty$ y $|x(t)| \to \infty$ para $t \to -\infty$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Veamos ahora qué resultados análogos a los anteriores se tienen para los sistemas $x' = A(t)x$, con $A(t)$ de período T. En primer lugar, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1. (Floquet). *Dado el sistema* (1), *con* $A(t)$ *una matriz continua y periódica de período* T, *existe una constante no nula* μ *(real o compleja), y al menos una solución*

[7] μ es real si $a(t)$ toma valores reales o posiblemente complejo si $a(t)$ toma valores complejos.

no trivial $x(t)$ *de* (1), *que verifica*

$$x(t + T) = \mu x(t) \quad , \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{11}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema (1). La matriz $\Psi(t) = \Phi(t + T)$ también es matriz fundamental de (1). En efecto:

$$\Psi'(t) = \Phi'(t + T) = A(t + T)\Phi(t + T) = A(t)\Psi(t)$$

y

$$\det \Psi(t) = \det \Phi(t + T) = \Phi(0) \exp\left(\int_0^{t+T} \operatorname{tr} A(s)ds\right) \neq 0$$

por la fórmula de Liouville (proposición 4 del apartado 2.3), con lo que la afirmación resulta de la proposición 1 del apartado 2.3. Existe, en consecuencia, por la proposición 2 de ese mismo apartado 2.3, una matriz constante no singular C tal que

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C \tag{12}$$

Sea μ un autovalor (real o complejo) de C; $\mu \neq 0$, ya que C es no singular. Tomemos un autovector v correspondiente a μ y la solución dada por

$$x(t) = \Phi(t)v$$

(es decir, la correspondiente a la condición inicial $x(0) = \Phi(0)v$). Entonces:

$$x(t + T) = \Phi(t + T)v = \Phi(t)Cv = \Phi(t)(\mu v) = \mu\Phi(t)v = \mu x(t)$$

Recíprocamente, para cualquier solución que verifique la propiedad (11), el número μ ha deser un autovalor de la matriz C, según se comprueba inmediatamente. Si $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $m \leqslant n$, son los distintos autovalores de C, entonces existen m soluciones de (1) linealmente independientes que poseen la propiedad (11). Más generalmente, si C tiene r, $r \leqslant n$, autovectores linealmente independientes, entonces existen r soluciones de (1) linealmente independientes con la propiedad (11).

Definición. *Los autovalores* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *de la matriz* C *se denominan multiplicadores característicos del sistema* (1). *Los números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *definidos por las relaciones* $\mu_j = e^{\lambda_j T}$, $j = 1, \ldots, m$, *son los exponentes característicos del sistema* (1).

Obsérvese que los multiplicadores característicos están univocamente determinados por el sistema (1), ya que si en los argumentos anteriores utilizamos otra matriz fundamental $\Phi_1(t)$ y C_1 es tal que $\Phi_1(t + T) = \Phi_1(t)C_1$, entonces, por la proposición 2 del apartado 3.2 antes mencionada, existe una matriz no singular Q tal que $\Phi_1(t) = \Phi(t)Q$, $t \in \mathbb{R}$, de donde:

$$\Phi_1(t)C_1 = \Phi_1(t + T) = \Phi(t + T)Q = \Phi(t)CQ = \Phi_1(t)Q^{-1}CQ$$

es decir, $C_1 = Q^{-1}CQ$, con lo que C y C_1 son matrices semejantes y tendrán los mismos autovalores. Las matrices C definidas por (12) se denominan *matrices de monodromía* del sistema (1).

Los exponentes característicos, por su parte, están determinados, de acuerdo con su definición, salvo adición de múltiplos enteros de $2\pi i/T$ (sí están determinadas unívocamente sus partes reales).

Del teorema anterior se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario. *El sistema* (1) *tiene una solución periódica de período* T *(respectivamente* $2T$*) si, y sólo si, existe al menos un multiplicador característico igual a* 1 *(respectivamente* -1*).*

Si μ_j es un multiplicador característico de (1) y $x(t)$ es una solución tal que $x(t + T) = \mu_j x(t)$, de acuerdo con el teorema 1, entonces, como en el caso escalar, podemos escribir

$$x(t) = p(t)e^{\lambda_j t} \tag{13}$$

siendo λ_j un exponente correspondiente a μ_j, o sea, $\mu_j = e^{\lambda_j T}$, teniéndose para $p(t)$ que

$$p(t + T) = x(t + T)e^{-\lambda_j(t+T)} = \mu_j x(t)e^{-\lambda_j t}e^{-\lambda_j T} = x(t)e^{-\lambda_j t} = p(t)$$

es decir, $p(t)$ tiene período T y vemos que $x(t)$ se puede expresar como el producto de una función de período T y una función exponencial. Se tiene así el siguiente resultado:

Teorema 2. *Si la matriz* C *definida por* (12) *tiene* r *autovectores linealmente independientes, entonces el sistema* (1) *posee* r *soluciones linealmente independientes de la forma*

$$x_j(t) = p(t)e^{\lambda_j t} \quad , \quad j = 1, \ldots, r$$

donde las funciones $p_j(t)$ *son periódicas de período* T.

Si, por ejemplo, existen n multiplicadores distintos (los autovalores de C), entonces hay una base del espacio de soluciones de (1) formada por funciones de la forma (14). [En los problemas 11 y 12 se plantea una generalización de este resultado, de acuerdo con la cual existe una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$ que es de la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt} \tag{14}$$

donde $P(t)$ es una función matricial de período T y B es una matriz de Jordan constante.]

La aplicación práctica de los resultados anteriores no es tan simple como podría

parecer al comparar con los resultados análogos que veíamos para las ecuaciones escalares. En éstas, siempre es posible, en principio, calcular el multiplicador

$$\mu = \exp\left[\int_0^T a(s)ds\right]$$

mientras que ahora hay que conocer la matriz C para determinar sus autovalores, o, lo que es equivalente, conocer una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema (1), y esto, como sabemos, no es en general posible.

Un resultado útil a este respecto, derivado de la fórmula de Liouville, es el contenido en la siguiente proposición.

Proposición. *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ los multiplicadores característicos (teniendo en cuenta su multiplicidad) y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los correspondientes exponentes. Entonces:*

$$\mu_1 \cdots \mu_n = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)\,ds\right) \tag{15}$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds \ (\text{mód } 2\pi i/T) \tag{16}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de (1) tal que $\Phi(0) = I$. Entonces, la matriz C tal que $\Phi(t + T) = \Phi(t)C$ es $C = \Phi(T)$. Por la fórmula de Liouville:

$$\det C = \det \Phi(T) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right)$$

de donde resultan (15) y (16) por la definición de multiplicadores y exponentes característicos.

EJEMPLO 1. Consideremos la ecuación de segundo orden

$$x'' + p(t)x = 0 \tag{17}$$

donde p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica de período π. Se trata de la *ecuación de Hill*, que aparece en el estudio de los movimientos lunares. El sistema equivalente es

$$x' = A(t)x \quad , \quad \text{con } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Tomemos la base del espacio de soluciones formada por las soluciones $\varphi_1(t)$ y

$\varphi_2(t)$ de (17) que satisfacen las condiciones iniciales

$$\begin{cases}\varphi_1(0) = 1 \quad , \quad \varphi_1'(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2'(0) = 1\end{cases}$$

La matriz fundamental de (18) dada por

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{bmatrix}$$

satisface $\Phi(0) = I$ y se tiene, por tanto, que

$$C = \begin{bmatrix}\varphi_1(\pi) & \varphi_2(\pi) \\ \varphi_1'(\pi) & \varphi_2'(\pi)\end{bmatrix}$$

Si μ_1 y μ_2 son los autovalores de C, se tendrá, por (15):

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \exp\left(\int_0^{\pi} (0)ds\right) = 1 \tag{19}$$

mientras que los exponentes característicos satisfacen

$$\lambda_1 + \lambda_2 \equiv 0 \pmod{2i} \tag{20}$$

Si $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $\lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, entonces (20) quiere decir que

$$\begin{cases}\alpha_2 = -\alpha_1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 2k \quad , \quad \text{para un entero } k\end{cases} \tag{21}$$

Se tiene, pues:

$$\begin{cases}\mu_1 = e^{\lambda_1 \pi} = e^{\alpha_1 \pi}(\cos \beta_1 \pi + i \operatorname{sen} \beta_1 \pi) \\ \mu_2 = e^{\lambda_2 \pi} = e^{-\alpha_1 \pi}(\cos \beta_1 \pi - i \operatorname{sen} \beta_1 \pi)\end{cases}$$

es decir, se puede definir un número $\lambda = \alpha + i\beta$ (con β definido salvo adición de $2k$, k entero) tal que

$$\mu_1 = e^{\lambda \pi} \quad , \quad \mu_2 = e^{-\lambda \pi} \tag{22}$$

De acuerdo con los resultados anteriores, se tendrá:

a) Si $\alpha \neq 0$, entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y la ecuación (17) tendrá un par de soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\psi_1(t) = p_1(t)e^{\lambda t} = p_1(t)e^{\alpha t}e^{i\beta t}$$
$$\psi_2(t) = p_2(t)e^{-\lambda t} = p_2(t)e^{-\alpha t}e^{-i\beta t}$$

siendo $p_1(t)$ y $p_2(t)$ periódicas de período π. Cuando $t \to \infty$, una de ellas converge a 0 y la otra converge en módulo a infinito.

b) Supongamos ahora que $\alpha = 0$. Entonces:

— Si $\beta \equiv 0$ (mód 2, o sea, de la forma $2k$, k entero) entonces $\mu_1 = \mu_2 = 1$, y existe una solución periódica de período π.

— Si $\beta \equiv 1$ (mód 2), entonces $\mu_1 = \mu_2 = -1$, y existe una solución de período 2π.

Vemos cómo la proposición anterior permite, al menos, estudiar la ecuación de Hill analizando un único exponente característico, pero el cálculo o la estimación de éste requiere todavía mucho trabajo adicional (véase, por ejemplo, Hale [7]).

Demos, para terminar este apartado, un resultado relativo a la ecuación no homogénea

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{23}$$

con $A(t)$ y $b(t)$ periódicas de período T, que es el análogo para ecuaciones periódicas al teorema 4 del apartado 6.4 (uno y otro resultado se engloban en la *Alternativa de Fredholm* que se considera en el problema 16).

Teorema 3. *El sistema* (23) *tiene una única solución periódica de período T para toda* $b(t)$ *si, y sólo si, el correspondiente sistema homogéneo* $x' = A(t)x$ *no tiene soluciones no triviales de período T.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema homogéneo tal que $\Phi(0) = I$. La correspondiente matriz de monodromía es $C = \Phi(T)$. Decir que $x' = A(t)x$ no tiene soluciones no triviales de período T es equivalente a decir que 1 no es autovalor de $C = \Phi(t)$ o, lo que es lo mismo, que la matriz $(I - \Phi(t))$ es invertible (por el corolario del teorema 1).

Las soluciones de (23) están dadas por

$$x(t) = \Phi(t)x^0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds \tag{24}$$

Una solución $x(t)$ es periódica si, y sólo si, $x(T) = x(0) = x^0$, por el mismo argumento que en la demostración el teorema 2 del apartado 6.4. Así pues, $x(t)$ es periódica si, y sólo si, $x^0 = x(0)$ es tal que

$$x^0 = \Phi(T)x^0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)\,ds$$

O sea,

$$(I - \Phi(T))x^0 = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

Pero que $(I - \Phi(T))$ sea invertible es equivalente a que esta última ecuación tenga una única solución $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 2. Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{sen} t & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \tag{25}$$

El sistema homogéneo se puede resolver explícitamente gracias a que la primera ecuación está desacoplada de la segunda; su solución general es:

$$x(t) = k_1 \begin{bmatrix} e^t \\ (1/5)e^t(2 \operatorname{sen} t - \cos t) \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Vemos que no hay soluciones periódicas; la matriz $A(t)$ tiene período 2π y la función $b(t)$ período $2\pi/\omega$. En consecuencia, habrá una solución periódica de (25) (que será única) si ω es un número racional.

PROBLEMAS

1. Probar que todas las soluciones de la ecuación

$$x''' + 7x'' + 16x' + 8x = 0$$

verifican que

$$\lim_{t \to \infty} (|x(t)| + |x'(t)| + |x''(t)|) = 0$$

2. Determinar los valores de los parámetros (a, b) para los cuales el sistema

$$\begin{cases} x_1' = ax_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = -bx_1 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

es atractor, representándolos gráficamente en el «plano de parámetros» (a, b).

3. Estudiar si el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x$$

es atractor. (*Indicación*: no es fácil calcular los autovalores de la matriz de coeficientes.)

4. Se consideran los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las matrices dadas en el problema 1 del capítulo 3 y en el problema 1 del capítulo 5. Identificar en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$, 3, 4 ó 5, según proceda) los subespacios de condiciones iniciales que dan lugar a

a) soluciones que convergen a 0 cuando $t \to \infty$;
b) soluciones que convergen a 0 cuando $t \to -\infty$;
c) soluciones acotadas en $[0, \infty)$;
d) soluciones acotadas en $(-\infty, 0]$;
e) soluciones acotadas en $(-\infty, -\infty)$, y
f) soluciones periódicas no triviales.

5. Describir las soluciones periódicas del sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

6. Para el sistema $x' = Ax$ del problema 2 del capítulo 5, se pide: *a*) determinar, para los distintos valores del parámetro a, los subespacios estable, inestable y centro; *b*) bosquejar el diagrama de fases del sistema $y' = By$, donde B es la forma canónica de A, y c) comentar cómo varían con a los diagramas obtenidos.

7. Probar que si la matriz A tiene al menos un autovalor con parte real positiva, entonces, para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe una solución $x(t)$ de $x' = Ax$ tal que

$$|x(0) - p| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} |x(t)| = \infty$$

8. Sea A una matriz 4×4 que tiene por autovalores $\pm b_1 i$, $\pm b_2 i$, con $b_1, b_2 > 0$ y $b_1 \neq b_2$. Probar que

a) Si b_1/b_2 es un número racional, entonces toda solución de $x' = Ax$ es periódica.
b) Si b_1/b_2 es irracional, existen soluciones acotadas no triviales que *no* son periódicas.

9. Sean $x' = Ax$, $x' = Bx$ dos sistemas atractores. Probar que, si $AB = BA$, el sistema $x' = (A + B)x$ también es atractor. Mostrar que eso puede ser falso si no se hace la hipótesis $AB = BA$.

10. Determinar todas las soluciones periódicas del sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

según los distintos valores del parámetro real ω.

11. Se trata de probar que si B es una matriz no singular, entonces existe una matriz A tal que $e^A = B$ (se dirá que $A = \log B$).

a) Sea $B = J_k$ un bloque de Jordan de dimensión $n_k \times n_k$. Entonces, o bien J_k es una matriz 1×1, (λ_k), o bien

$$J_k = \lambda_k \left(I_{n_k} + \frac{1}{\lambda_k} N_k \right)$$

donde

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

I_{n_k} es la matriz identidad de dimensión $n_k \times n_k$ y $\lambda_k \neq 0$, pues se supone B no singular.

En analogía con la serie numérica

$$\log(1 + x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} x^l, \quad |x| < 1$$

se define

$$A_k = \log J_k := (\log \lambda_k) I_{n_k} + \log \left(I_{n_k} + \frac{1}{\lambda_k} N_k \right) :=$$

$$:= (\log \lambda_k) I_{n_k} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left(\frac{N_k}{\lambda_k} \right)^l$$

($\log \lambda_k$ está definido, pues $\lambda_k \neq 0$).

Compruébese que no hay problemas de convergencia, pues la serie se reduce, en realidad, a una suma finita debido a las propiedades de la matriz N_k, quedando

$$A_k = (\log \lambda_k) I_{n_k} + \sum_{l=1}^{n_k - 1} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \left(\frac{N_k}{\lambda_k} \right)^l \qquad (*)$$

b) Las series de potencias de $\log(1 + x)$ y e^x se pueden componer, para $|x| < 1$, para dar $(1 + x) = e^{\log(1+x)}$, por resultados conocidos de la teoría de series. Realizar las mismas operaciones con matrices y comprobar que, como no hay problemas de

convergencia con la serie (*), se tiene que

$$e^{A_k} = \lambda_k \left(I_{n_k} + \frac{1}{\lambda_k} N_k \right)$$

c) Si $B = J = \text{diag}\,\{J_1, ..., J_s\}$ es una matriz de Jordan se construye la matriz

$$K = \text{diag}\,\{A_1, ..., A_s\}$$

donde $A_k = \log \lambda_k$ si J_k es de dimensión 1×1 y está definida por (*) si J_k es de dimensión $n_k \times n_k$ con $n_k > 1$, $k = 1, ..., s$.

Compruébese que $e^K = J$.

d) Para una matriz B general (no singular) se tiene $B = PJP^{-1}$, siendo J su forma canónica de Jordan. Compruébese que la matriz

$$A = PKP^{-1}$$

donde K es la matriz construida en *c*), verifica

$$e^A = B$$

e) Compruébese que la matriz logaritmo no es única: si $B = e^A$, también se tiene $B = e^{A + 2k\pi iI}$, para cualquier número entero k. En consecuencia, los autovalores de $\log B$ tienen bien determinada su parte real mientras que su parte imaginaria está definida módulo $2k\pi i$.

12. (Teorema de Floquet)

a) Cualquier matriz fundamental $\Phi(t)$ de un sistema periódico $x' = A(t)x$, $A(t + T) = A(t)$, es de la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt} \qquad (*)$$

donde $P(t)$ es una matriz periódica y R es una matriz constante.

(*Indicación*: si C es la matriz de monodromía asociada a $\Phi(t)$, tómese R tal que $e^{TR} = C$ y $P(t) = \Phi(t)e^{-TR}$. Obsérvese que los exponentes característicos son los autovalores de R.)

b) Existe una matriz fundamental $\Phi(t)$ de la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt} \qquad (**)$$

donde $P(t)$ es una matriz periódica y B es una matriz de Jordan.

13. Probar que si $A(t)$ es periódica de período T y es *impar*, o sea, $A(-t) = -A(t)$, entonces todas las soluciones de $x' = A(t)x$ son periódicas de período T.

14. Con las notaciones del problema 12, probar que el cambio de variables (dependiente de t)

$$x = P(t)y$$

convierte al sistema periódico $x' = A(t)x$ en el sistema equivalente de coeficientes constantes $y' = By$.

(*Observación*: esta reducción es interesante desde el punto de vista teórico —véase el problema siguiente— pero no desde el punto de vista práctico, de cálculo de las soluciones, pues para conocer B sería necesario conocer los multiplicadores característicos, o sea, la matriz de monodromía $C = \Phi^{-1}(t)\Phi(t + T)$, lo que requiere conocer la matriz fundamental $\Phi(t)$.)

15. Utilizando el problema anterior y los resultados de los apartados 6.2 y 6.3, probar el siguiente resultado:

a) Toda solución de $x' = A(t)x$, $A(t + T) = A(t)$, converge a 0 cuando $t \to \infty$ si, y sólo si, $|\mu_j| < 1$ para todo multiplicador característico μ_j (equivalentemente, Re $\lambda_j < 0$ para todo exponente característico λ_j).

b) Toda solución de $x' = A(t)x$ es acotada si, y sólo si,

1. $|\mu_j| \leqslant 1$ para todo multiplicador característico (Re $\lambda_j \leqslant 0$ para todo exponente característico).
2. Si $|\mu_j| = 1$, todos los bloques J_j correspondientes a μ_j en la forma canónica de Jordan de una matriz de monodromía C son matrices 1×1.

c) (Véase el corolario al teorema 1 del apartado 6.5.) Si 1 es multiplicador característico de multiplicidad geométrica m, entonces el subespacio de soluciones de período T es de dimensión m.

16. *a*) Se considera el sistema periódico

$$x' = A(t)x \tag{1*}$$

con $A(t + T) = A(t)$, y su *sistema adjunto* (véase el problema 7 del capítulo 2)

$$y' = -[A(t)]^T y \tag{2*}$$

Probar que los sistemas (1*) y (2*) tienen el mismo número de soluciones de período T linealmente independientes.

(*Indicación*: sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de (1*) tal que $\Phi(0) = I$. Comprobar —véase la demostración del teorema 3 del apartado 6.5— que las soluciones periódicas de (1*) y (2*) están dadas por las condiciones iniciales x_0 e y_0 tales que

$$(\Phi(T) - I)x_0 = 0 \tag{3*}$$

$$y_0^T(\Phi^{-1}(T) - I) = 0 \tag{4*}$$

Multipliquese por la derecha la segunda de estas ecuaciones por la matriz no singular $\Phi(T)$ y compruébese, por resultados elementales del álgebra lineal, que el número de soluciones linealmente independientes de ambos sistemas lineales algebraicos es el mismo.)

b) (*Alternativa de Fredholm.* Compárese con el correspondiente resultado para sistemas lineales algebraicos.)

1. Si $A(t)$ y $b(t)$ son periódicas de período T, entonces la ecuación

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{5*}$$

tiene una solución de período T si, y sólo si,

$$\int_0^T y(t)^T b(t)dt = 0 \tag{6*}$$

para toda solución $y(t)$ de (2*) de período T.

2. Si se cumple (6*) y si (2*) (o (1*)) tiene m soluciones linealmente independientes de período T, entonces la ecuación no homogénea (5*) tiene una familia m-paramétrica de soluciones de período T.
3. En particular, si $x' = A(t)x$ no tiene soluciones de período T, entonces $x' = A(t)x + b(t)$ tiene una única solución de período T dada por

$$x(t) = \int_t^{t+T} [\Phi(s)(\Phi^{-1}(T) - I)\Phi^{-1}(t)]^{-1} b(s)ds \tag{7*}$$

[Éste es el teorema 3 del apartado 6.5. Véase también el teorema 2 del apartado 6.4.]

[*Indicación*: como en el teorema 3 del apartado 6.5, $x(t)$ es solución periódica de (5*) si, y sólo si, $x(0) = x_0$ es tal que

$$(\Phi^{-1}(T) - I)x_0 = \int_0^T \Phi^{-1}(s)b(s)ds := b \in \mathbb{R}^n \tag{8*}$$

Esta ecuación en $\mathbb{R}^n$ tiene solución si, y sólo si,

$$y_0^T b = 0 \tag{9*}$$

para todo vector fila y_0^T solución de (4*), según se sabe por álgebra lineal elemental. Compruébese que (9*) es la condición (6*). En cuanto a 2), si se satisface (6*) y $p(t)$ es una solución periódica de (5*), entonces las demás serán de la forma $p(t) + x(t)$, con $x(t)$ solución periódica del sistema homogéneo (1*), y se aplica la parte 1). La fórmula (7*) se establece como en el teorema 2 del apartado 6.4.]

17. Reconsiderar el problema (10) a la luz de la alternativa de Fredholm.

Soluciones de los problemas

Capítulo 1

1. *a)* $x(t) = \dfrac{373}{125}e^{-5t} + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{2t}{25} + \dfrac{2}{125}$; $t \in \mathbb{R}$.

b) $x(t) = \dfrac{2+t}{2\cos t} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$; $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $x(t) = \dfrac{3}{2}e^{-t^2} + \dfrac{1}{2}(t^2 - 1)$; $t \in \mathbb{R}$.

d) $x(t) = \left[\exp\left(\displaystyle\int_1^t \frac{1}{\sqrt{1+s^3}}\,ds\right)\right] \cdot$

$$\cdot\left[2 + \int_1^t \frac{1}{s}\exp\left(-\int_1^s \frac{1}{\sqrt{1+u^3}}\,du\right)ds\right] \quad ; \quad t > 0.$$

(*Nota.* La primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$ no es una función elemental.)

3. $P_0 = 12.602$ personas.

4. *b)* 675,67 horas.

5. *a)* 11.460 años.

6. *a)* $m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv$.

b) $v(t) = \left(v_0 + \dfrac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)t} - \dfrac{mg}{k}$.

c) $t = \dfrac{m}{k}\ln\left(1 + \dfrac{v_0 k}{mg}\right)$; $x_{\text{máx}} = \dfrac{v_0}{kg} - \dfrac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1 + \dfrac{v_0 k}{mg}\right)$.

7. $\dfrac{dQ}{dt}$ = (ritmo de entrada) − (ritmo de salida) (de la sal) =

$= cr_0 - \dfrac{r}{v_0 + r_0 t - rt}Q(t)$, siendo V_0 el volumen inicial de agua salada en R.

Capítulo 2

3. El sistema tiene por matriz de coeficientes $A(t) = \Phi'\Phi^{-1}$.

4. *a)* $CA(t) = A(t)C$.

b) $B(t) = CA(t)C^{-1}$.

7. La primera ecuación está desacoplada de la segunda. Una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

La solución es $x(t) = t^3/2 + t/2$, $y(t) = -t^2/2 - t + 1/2$.

8. *a)* Utilícese la fórmula de Liouville. Ha de ser $a(t) = kt$, con $k \neq 0$.

b) Por el problema 3, se tendrá:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1/t & 0 & -1/t^2 \\ 0 & 2/t & -1/t \\ 0 & 0 & 1/t \end{bmatrix}$$

c) $x(t) = \begin{bmatrix} t & t & 1 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t^2 + t \\ t \end{bmatrix}$.

9. *a)* $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

b) $x(t) = C_1 t^2 + C_2 t^3$.

c) $\varphi_1(t) = 1$ (o cualquier constante); $x(t) = C_1 + C_2\sqrt{1 - t^2}$.

11. Esos infinitos ceros de $\varphi(t)$ tendrán un punto de acumulación c en $[a, b]$ en el que también será $\varphi'(c) = 0$.

Capítulo 3

1. Se dan los autovalores y una matriz de paso:

a) $2, 3;\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $-5, 15;\ P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $2 \pm i;\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $-2, 0, 1;\ P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2};\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

f) 2 doble, 5; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (la matriz A es simétrica).

g) $-1, \pm i, 1;\ P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

h) $-2, -2 \pm 2i, 2;\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $x(t) = Pe^{Bt}P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Pe^{Bt}\int_0^t e^{-Bs}P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \text{ sen } s \end{bmatrix} ds$, con

$$B = \begin{bmatrix} -3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6-3\sqrt{3} & 6+3\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

4. Recuérdese que si λ es autovalor de A y v es un autovector correspondiente, $x(t) = e^{\lambda t}v$ es la solución de $x' = Ax$ tal que $x(0) = v$.

Capítulo 4

1. Se da la forma canónica y una matriz de paso:

a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. *a)* Nodo inestable; $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Punto de silla; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Punto de silla; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

d) Nodo estable; $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

e) Centro; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

f) Centro; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

g) Espiral inestable; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

h) Espiral estable; $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Los autovalores son $\lambda = \frac{1}{2}\left[(6+\mu) \pm \sqrt{\mu(\mu-12)}\right]$. Por tanto, el origen es:

— si $\mu < -3/2$, un punto de silla;
— si $\mu = -3/2$, un punto de equilibrio no elemental;
— si $-3/2 < \mu < 0$, un nodo inestable;
— si $\mu = 0$, un nodo impropio inestable;
— si $0 < \mu < 12$, un punto espiral inestable;
— si $\mu = 12$, un nodo impropio inestable, y
— si $12 < \mu$, un nodo inestable.

6. Hágase el cambio de variables $y = x + A^{-1}b$.

7. *a)* $x(t) = -(2/3)e^{1-t} + (2/3)e^{2(t-1)}$.

b) $x(t) = e^{2t}(5\cos 5t + (1/10)\operatorname{sen} 5t)$.

c) $x(t) = e^{3t} - te^{3t} + 2$.

9. La solución general es: $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$. Ha de ser:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad , \quad x(\infty) := \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

esto último equivale a $C_2 = 0$, con lo que $C_1 = 1$. Por tanto, $x(t) = e^{-3t}$.

11. *a)* $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$.

b) $x(t) = C_1 + C_2e^{5t} - t\left(\frac{1}{10}t^3 + \frac{2}{25}t^2 + \frac{12}{250}t + \frac{274}{1.250}\right)$.

c) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{t}{4}(2t^2 - 3t + 3)e^t$.

d) $x(t) = e^{-t}\left(C_1 + C_2t + \frac{t^6}{6\cdot 5} + \frac{t^5}{5\cdot 4} + \frac{t^4}{4\cdot 3} + \frac{t^3}{3\cdot 2} + \frac{t^2}{2\cdot 1}\right)$.

e) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$.

f) Los autovalores son $1 \pm 2i$. Utilícese el hecho de que

$$e^t(1+\cos t)^2 = e^t(1 + 2\cos t + \cos^2 t) = e^t\left(\frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right).$$

Capítulo 5

1. Se da la forma canónica y una matriz de paso

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $B = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

f) $B = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

g) $B = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Los autovalores de A son $a-\sqrt{a^2-1}$, $a+\sqrt{a^2-1}$, 1.

Si $|a|>1$, se tienen tres autovalores reales distintos. La forma canónica es diagonal y una matriz de paso es

$$P=\begin{bmatrix} -1+a-\sqrt{a^2-1} & -1+a+\sqrt{a^2-1} & 0 \\ a+\sqrt{a^2-1} & a-\sqrt{a^2-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $|a|<1$, hay un par de autovalores complejos. La matriz canónica es

$$B=\begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} & 0 \\ -\sqrt{1-a^2} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y una matriz de paso

$$P=\begin{bmatrix} -1+a & \sqrt{1-a^2} & 0 \\ a & -\sqrt{1-a^2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $a=1$, $\lambda=1$ es autovalor triple, y se tiene

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad,\quad P=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $a=-1$, los autovalores son -1 doble y 1. Se tiene

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad,\quad P=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Introduciendo las nuevas variables $x'=u$, $y'=v$ se tiene un sistema equivalente de cuatro ecuaciones con matriz de coeficientes

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *a*) La solución general de la homogénea es:

$$x_h(t) = C_1 e^t + e^{3t}(C_2 \cos 2t + C_3 \operatorname{sen} 2t)$$

Hay una solución particular de la forma

$$x_p(t) = at^2 + bt + c$$

con a, b y c coeficientes a determinar.

b) $x_h(t) = (A + Bt)\cos 2t + (C + Dt)\operatorname{sen} 2t$.

$x_p(t) = t^2(a \cos 2t + b \operatorname{sen} 2t)$.

6. $n = 8$.

Capítulo 6

1. Aplíquese el criterio de Routh-Hurwitz.

2. Por el criterio de Routh-Hurwitz ha de ser $a(2 - b) > 0$, $ab - a - 1 > 0$, lo que da la región abierta del primer cuadrante delimitada por la recta $b = 2$ y la curva $b = (a + 1)/a$.

3. No es atractor. Utilícese el criterio de Routh-Hurwitz o el de los menores principales, ya que se trata de una matriz simétrica.

5. Los autovalores de A son $0, \pm i, \pm 2i$. Hay dos soluciones periódicas linealmente independientes de período π y cuatro soluciones linealmente independientes de período 2π.

9. Contraejemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

10. El sistema se puede integrar explícitamente (es equivalente a la ecuación de segundo orden $x'' + x = \operatorname{sen} \omega t$). Si $\omega \neq 1, 1/2, 1/3, \ldots$, existe una única solución periódica de período $2\pi/\omega$. Si $\omega = 1$, no hay soluciones de período 2π (es el caso de resonancia pura para la ecuación de segundo orden). Si $\omega = 1/k$ para algún entero $k > 1$, hay una familia doblemente paramétrica de soluciones de período $2k\pi$.

Referencias

[1] Braun, M. (1990): *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[2] Chiang, A. C. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática*, Madrid: McGraw-Hill.

[3] Coppel, W. A. (1965): *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Boston: Heath.

[4] Gandolfo, G. (1976): *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*, Madrid: Tecnos.

[5] Gantmacher, F. R. (1966): *Théorie des matrices*, París: Dunod.

[6] Guzmán, M. de (1975): *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Madrid: Alhambra.

[7] Hale, J. K. (1969): *Ordinary Differential Equations*, Nueva York: Wiley-Interscience.

[8] Hirsch, M. W., y Smale, S. (1983): *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Madrid: Alianza.

[9] Martin, G. E. (1982): *Transformation Geometry. An Introduction to Symetry*, Nueva York: Springer-Verlag.

[10] Maynard Smith, J. (1974): *Models in Ecology*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[11] Murray, J. D. (1989): *Mathematical Biology*, Berlín: Springer-Verlag.

Índice analítico

Amplitud, 59, 177, 181.
Ángulo de fase, 59, 177.
Aproximaciones sucesivas, método de, 69.
Atractor, 250.
Autoinducción, 58.
Autovalor, 101, 114.
Autovector, 101, 114.

Bernoulli, ecuación de, 49.
Bloque de Jordan, 202.

Cambio de variables lineal, 100.
Campo vectorial, 140.
Canónicas, formas, 202, 206.
Capacidad de soporte, 25.
Capacitancia, 187.
Característica, ecuación, 100, 115.
Característico, multiplicador y exponente, 286.
Centro, 151.
  subespacio, 270.
Circuitos eléctricos, 57, 186.
Coeficientes indeterminados, método de, 110, 163, 211, 241.
Comparación, criterio de, 73.
Condensador, 186.
Condición inicial, 23, 30.
Conservación de la energía, 178.
Constante de desintegración, 25, 63.
Convergencia, 72.
  uniforme, 74.
Críticamente amortiguado, movimiento, 180.
Curvas integrales, 140.

Demanda excedente, 60.
Desintegración de una sustancia radiactiva, 24.
Diagonal, matriz, 102.
Diagonalizable, matriz, 102.
Diagrama de fases, 137.
Diferencia de potencial, 57.
Directa, suma, 259.

Ecuación (sistema) adjunta(o), 95, 295.
Ecuaciones desacopladas, 102.
Ecuación
  en diferencias, 20, 53.
  integral, 67.
  logística, 24-25.
  vectorial, 32, 36-37.
Ecuación diferencial, 15.
  con argumento retardado, 21.
  de las trayectorias, 158.
  de orden superior, 33, 35.
    lineal, 89, 238.
  lineal, 17, 39.
    completa, 42, 71.
    homogénea, 39, 66.
  matricial, 82.
Elemental, sistema, 137.
Energía
  cinética, 178.
  potencial, 178.
  total, 178.
Equilibrio, punto de, 137.
Espiral, punto, 150.
Estable, subespacio, 258.
Estrella, punto, 146.
Exponencial de una matriz, 195.
Exponentes, regla de los, 195.

Fase, 59, 177.
Fijo, punto, 137.
Floquet, teorema de, 285, 294.
Foco, 150.

Forma cuadrática, 254.
Forma normal de una ecuación diferencial, 16, 30, 35.
Frecuencia, 177.
  angular, 177.
  de resonancia, 184.
  natural, 181.
  propia, 181.
Fredholm, alternativa de, 289, 295.
Fuente, 251.
Fuerza electromotriz, 57.
Funciones polares, 149, 158.

Gronwall, desigualdad de, 77, 94.

Hill, ecuación de, 288.
Hiperbólico, sistema, 255.

Impedancia, 59.
Índice de estabilidad, 256.
Inductancia, 58.
Inestable, subespacio, 259.
Intensidad, 58.
Iterantes de Picard, 69.
Interés compuesto, 24, 37.

Jordan, matriz de, 202.

Ley
  de Faraday, 58.
  de Fick de la difusión, 55.
  de Hooke, 174.
  de Newton
    de variación de la temperatura, 54.
    segunda, 32, 56.
  de Ohm, 58.
Leyes de Kirchhoff, 59.
Liouville, fórmula de, 82.
Logaritmo de una matriz, 292.

Matrices de monodromía, 286.
Matriz fundamental, 78-79.
Movimiento armónico simple, 34, 176.

Nilpotente, matriz, 206.
Nodo, 145.
  impropio, 147.
Norma, 72-73.

Órbita, 136.
Orden de una ecuación diferencial, 16.

Oscilaciones mecánicas, 173.
  forzadas, 182.
  libres
    amortiguadas, 179.
    no amortiguadas, 176.

Péndulo, 34, 176.
Problema de valor inicial, 22, 27, 30, 33, 41, 67, 84.
Puerto, 144.
Pulsaciones, 191.
Resistencia, 58.
Resonancia, 183-184.
  curva de, 185.
  pura, 186.
Riccati, ecuación de, 62.
Routh-Hurwitz, criterio de, 251.

Semivida, 63.
Serie, 73.
  absolutamente convergente, 73.
Silla, punto de, 144.
Simétrica, matriz, 107-108.
Simple, sistema, 137.
Singular, punto, 137.
Sistemas
  de ecuaciones diferenciales, 30.
  lineales, 65.
    con coeficientes constantes, 83, 99, 129, 193.
    homogéneos, 66.
    periódicos, 282.
  planos, 129.
Sobreamortiguado, movimiento, 180.
Solución de una ecuación diferencial, 16-17, 35.
  de un sistema de ecuaciones, 30.
Solución general, 17, 22, 26.
Subamortiguado, movimiento, 181.

Tasa
  de crecimiento, 19.
  instantánea, 19.
  de mortalidad, 19.
  de natalidad, 19.
Teorema de existencia y unicidad, 46, 70, 72.
Trayectoria, 136.

Valores iniciales, 36.
Variación de las constantes, 44, 85.

Wronskiano, 91.

TÍTULOS PUBLICADOS DE CIENCIA Y TÉCNICA

DISPOSITIVOS Y CIRCUITOS ELECTRÓNICOS, J. Millman y C. C. Halkias (11.ª ed.).
DISPOSITIVOS Y CIRCUITOS ELECTRÓNICOS. Soluciones a los problemas, J. Millman y C. C. Halkias (9.ª ed.).
CIENCIA DE MATERIALES, P. Coca Rebollero y J. Rosique Jiménez (14.ª ed.).
TECNOLOGÍA MECÁNICA Y METROTECNIA, P. Coca Rebollero y J. Rosique Jiménez (5.ª ed.).
FISIOLOGÍA VEGETAL, J. Barceló Coll, G. Nicolás Rodrigo, B. Sabater García y R. Sánchez Tamés (6.ª ed.).
CÁLCULO INFINITESIMAL. I.1, F. García Castro y A. Gutiérrez Gómez (5.ª ed.).
CÁLCULO INFINITESIMAL. I.2, F. García Castro y A. Gutiérrez Gómez (5.ª ed.).
CÁLCULO INFINITESIMAL. II.1, F. García Castro y A. Gutiérrez Gómez (4.ª ed.).
CÁLCULO INFINITESIMAL. II.2, F. García Castro y A. Gutiérrez Gómez (3.ª ed.).
ÁLGEBRA LINEAL (vol. 1), A. Gutiérrez Gómez y F. García Castro (2.ª ed.).
ÁLGEBRA LINEAL (vol. 2), A. Gutiérrez Gómez y F. García Castro (3.ª ed.).
GEOMETRÍA, A. Gutiérrez Gómez y F. García Castro.
ANATOMÍA VEGETAL, A. Fahn.
BIOQUÍMICA, K. Jungermann y H. Möhler.
ZOOLOGÍA DE INVERTEBRADOS, P. A. Meglitsch.
DICCIONARIO DE ELECTRÓNICA, R. F. Graf.
INMUNOLOGÍA, J. Peña Martínez (2.ª ed.).
MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, M. J. Valderrama Bonnet.
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 1. Números reales, sucesiones y series, M. de Guzmán y B. Rubio.
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2. Funciones, integrales, derivadas, M. de Guzmán y B. Rubio.
PASIÓN POR LAS ENZIMAS, A. Kornberg.
EL CONTROL DE LA EUTROFIZACIÓN EN LAGOS Y PANTANOS, S. O. Ryding y W. Rast.
ECUACIONES DIFERENCIALES I, C. Fernández Pérez.

ecuaciones diferenciales - I

ecuaciones lineales

Carlos Fernández Pérez

Ésta es la primera parte de un curso sobre ecuaciones diferenciales ordinarias que, partiendo del nivel más elemental, aborda los métodos y aplicaciones actuales de la teoría.

Los seis capítulos de que consta están dedicados a las ecuaciones lineales, las cuales, además de poseer una teoría muy completa, así como interesantes aplicaciones, constituyen la base del estudio "local" de las ecuaciones no lineales, a las que está dedicado el segundo volumen del curso: *Ecuaciones diferenciales II*.

Los conocimientos requeridos para seguir este libro son los que equivalen a un nivel de álgebra lineal y cálculo infinitesimal propio de un primer año de universidad. La exposición es clara, motivadora y progresiva, poniendo el énfasis en los aspectos *cualitativos* de las ecuaciones diferenciales, tan importantes en los mencionados métodos y aplicaciones actuales de la teoría.

La organización de los capítulos permite utilizar el libro en cursos de diversa extensión y profundidad. Al final de cada capítulo se incluye una serie de problemas, desde simples ejercicios que permiten comprobar el dominio de técnicas expuestas, hasta pequeños complementos a la teoría desarrollada.

Se pretende, con todo ello, ofrecer un instrumento de trabajo verdaderamente útil a los estudiantes de Matemáticas, Ciencias, Ingeniería y Economía.

Carlos Fernández Pérez explica, desde hace años, ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

0260041

ISBN 84-368-0697-2

9 788436 806977

PIRÁMIDE